2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組　成果報告表單

題目名稱：兜兜轉轉有幾份

一、摘要

圓周率的估計值 3.14 是可以有許許多多不同的方法來求出，可是 Progressive Arithmetic 的作者 William James Milne 卻用了一個不尋常的方法來做詮釋，大多數的讀者都是看過卻沒有深究作者 William 為什麼用這樣的方法，來求圓周率的估計值。 於是筆者利用數學軟體來做計算與研究，當把圓均分成左右各半的半圓形，一邊是 14 等分，另一個半圓分成 13 等分時，因而發現原作者所提供的方法，比起一般大眾所知道的方法更為精準的計算出圓周率的估計值，並且能夠加以推廣。

二、探究題目與動機

為了求證大眾較知道的方法與原本書籍的作者 William 所使用的方法之差異，我們作了以下實驗。

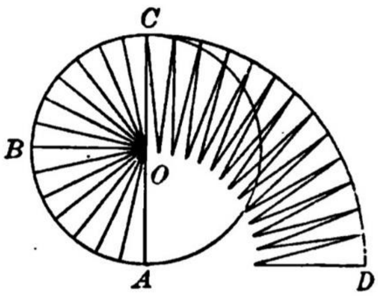
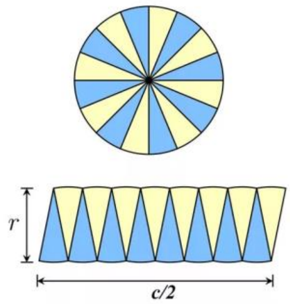
	

Fig.1	Fig.2

根據原本書籍當中所提供的圖片 Fig.1，一般常見的方法如 Fig.2 所示，所以我們希望將 Fig.1 左半圓與右半圓分別計算出分割出三角形後的面積其近似值，然後分別與半圓的面積作比較，找出兩者有何不同，並加以探討。

三、探究目的與假設

研究目的有以下三個：

【研究一】利用 Fig.1 右半部求圓周率近似值的計算方法

【研究二】原作者 William 的畫法如果推廣至分割成更多的扇形，進而求圓周率的近似值時，左半部與右半部的比較結果是否相同？

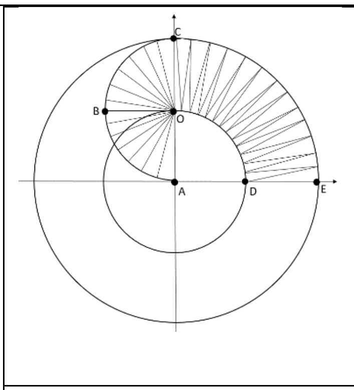
四、探究方法與驗證步驟

一、重現圖形

我們先把原圖畫出來後，才能深入了解，並且想出解決方法，再來進行計算和比較。

1.先作直角坐標　　2.以 A 為圓心, 取 10 單位長為半徑($\overline{AE}$)畫圓

3.以 A 為圓心，5 單位長半徑畫圓　　4.以 O 為圓心，5 單位長半徑畫半圓

5.將弧 CE 分成 13 等分，因為$\frac{90}{13}$度≒7 度，所以用量角器以七度為基準分割 6. 因為 $\frac{180}{14}$ 度≒13 度，所以將弧 CBA 以每 13 度分一等分，共分 14 片扇形 (如 Fig.3) 二、利用三角函數求出三角形面積 對於作者原本的圖形我們給了座標系統，根據利用廣義三角函數的推算我們能夠知道三角形的三個頂點座標，進而得到底跟高的長度，接著要利用到三角函數的面積公式，來求出分割後的三角形面積。	 Fig.3

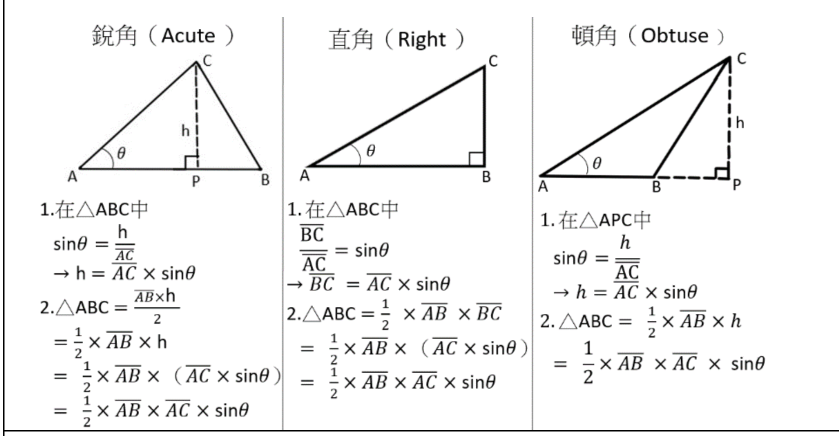


Fig.4

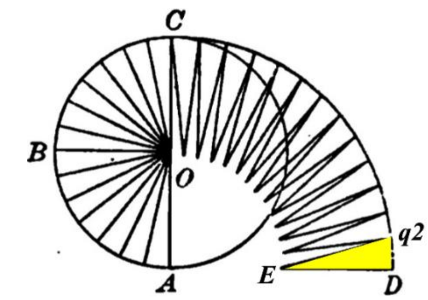


Fig.5

關於 Fig.12 右側的部分，我們先求出一個後， 將其乘上 13 倍，最後全部的面積就求出來了；左側的部分，我們也用同樣的方式處理。

三、如何算出點的座標

為了後續計算上的一致性與方便我們分別以半徑為 1($\overline{OA}$)與半徑為 2($\overline{AD}$)利用極座標求出於 Fig.15 中弧長 EO 和弧長 DC 上各點的位置。

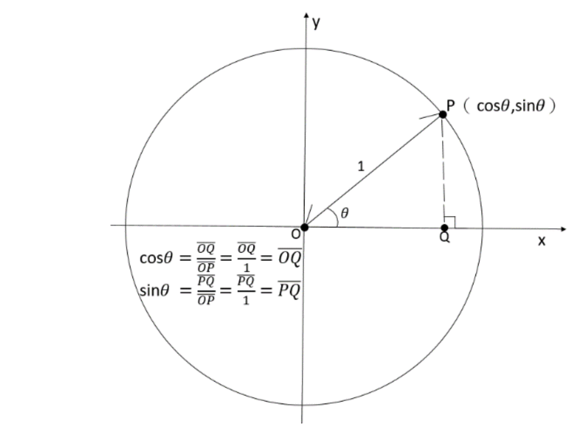


Fig.6

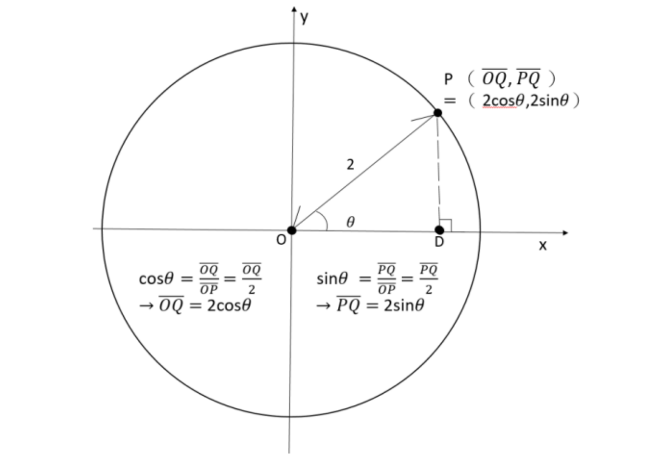


Fig.7

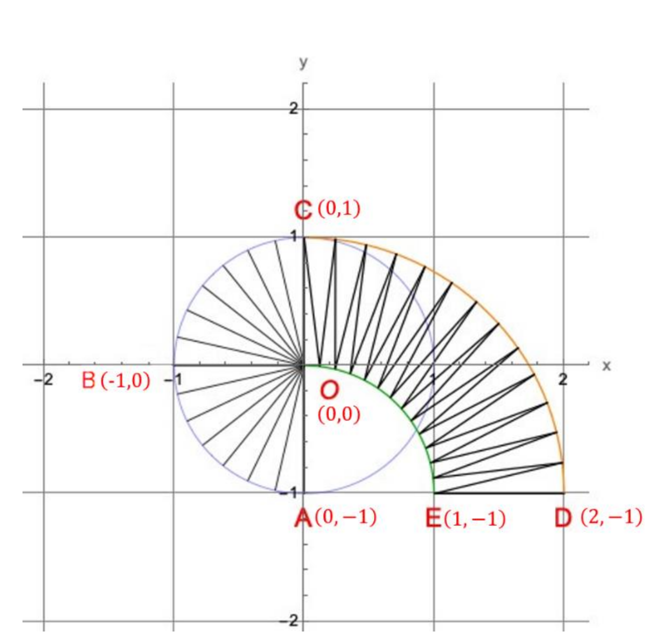


Fig.8

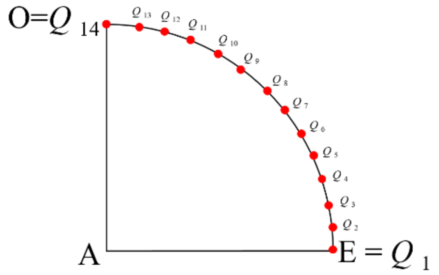


Fig. 9

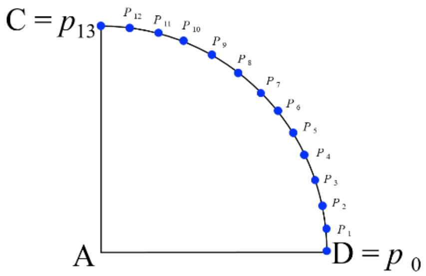


Fig. 10

令點 E$(1,-1)$到點 O$(0,0)$各點分別是Q_1(點 E)、Q_2、Q_3、Q_4、Q_5、Q_6、Q_7、Q_8、Q_9、Q_{10}、Q_{11}、Q_{12}、Q_{13}、Q_{14}(點 O)，點 D$(2,-1)$到點 C$(0,1)$各點分別是P_0(點 D)、P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6、P_7、P_8、P_9、P_{10}、P_{11}、P_{12}、P_{13}(點 C)

因為$\overline{AE}=1$，$\overline{AD}=2$，所以Q_1、Q_2、……、Q_{14}、P_0到P_{13}的座標分別為下方表格中

Q_1	$(1,-1)$	P_0	$(2,-1)$
Q_2	$\left(\cos\frac{\pi}{26},\sin\frac{\pi}{26}\right)$	P_1	$\left(2\cos\frac{\pi}{26},2\sin\frac{\pi}{26}\right)$
Q_3	$\left(\cos\frac{2\pi}{26},\sin\frac{2\pi}{26}\right)$	P_2	$\left(2\cos\frac{2\pi}{26},2\sin\frac{2\pi}{26}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Q_{13}	$\left(\cos\frac{12\pi}{26},\sin\frac{12\pi}{26}\right)$	P_{12}	$\left(2\cos\frac{12\pi}{26},2\sin\frac{12\pi}{26}\right)$
Q_{14}	$\left(\cos\frac{13\pi}{26},\sin\frac{13\pi}{26}\right)$	P_{13}	$\left(2\cos\frac{13\pi}{26},2\sin\frac{13\pi}{26}\right)$

四、計算三角形面積

1. Fig.11

$$\Delta AOA_0=\frac{\overline{AO}\times\overline{A_0O}\times\sin(\angle AOA_0)}{2}$$

利用 Mathematica 做計算，由於軟體 Mathematica 本身具有不同的輸入方式，因此我們只要輸入三角形的三個頂點座標，利用指令 Triangle, Area, N 可以求出三角形面積的近似值

```
In[33]:= (*AOA0*)
        Leftlabel = Style[{Text["A", {0, -1.05}],
            Text["A0", 1.05 Part[lp1, -2]],
            Text["O", {0.05, -0.05}]}, 18, Red];
        triLeft = Triangle[{O0, A0, Part[lp1, -2]}];
        areaLeft = N[Area[triLeft], 10]
        Graphics[{cir, Opacity[0.5], Orange, triLeft, Red, Leftlabel},
         Axes → True,
         AxesLabel → {"x", "y"},
         GridLines → Automatic,
         PlotRange → {{-1.2, 0.2}, {-1.2, 0.2}}]
Out[35]= 0.1112604670
```

Fig.11

我們可以得到三角形 AOA_0 的面積為 0.1112604670

2.求△EDP_1 的面積分成三個步驟:求△ADP_1 面積，接著求△AEP_1 面積，最後△EDP_1 面積

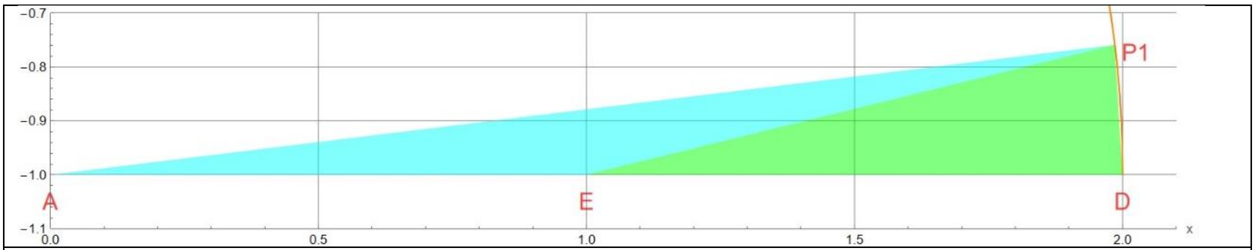


Fig.12

(1) 利用設定好點座標 *A, D, P1* 使用指令 Triangle, Area, N 可以求出三角形面積的近似值

```
pts1 = Style[{Text["A", {0, -1.05}],
    Text["D", {2, -1.05}],
    Text["E", {1, -1.05}],
    Text["P1", 1.02 Part[rp2, 2]]}, 18, Red];
triADP1 = Triangle[{A0, D0, Part[rp2, 2]}];
areaAEP1 = N[Area[triADP1], 10]
gr1 = Graphics[{Orange, arc2, Opacity[0.5], Blue, triADP1, pts1},
  Axes → True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  GridLines → Automatic,
  PlotRange → {{0, 2.1}, {-1.1, -0.7}}]
Out[39]= 0.2410733605
```

Fig.13

我們可以得到三角形 ADP_1 的面積為 0.2410733605

(2) 利用設定好點座標 *A, E, P1* 使用指令 Triangle, Area, N 可以求出三角形面積的近似值

```
triAEP1 = Triangle[{A0, E0, Part[rp2, 2]}];
areaAEP1 = N[Area[triAEP1], 10]
gr2 = Graphics[{Orange, arc2, Opacity[0.5], Cyan, triAEP1, pts1},
  Axes → True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  GridLines → Automatic,
  PlotRange → {{0, 2.1}, {-1.1, -0.7}}]
Out[42]= 0.1205366803
```

Fig.14

我們可以得到三角形 AEP_1 的面積為 0.1205366803

(3) 利用設定好點座標 *D, E, P1* 使用指令 Triangle, Area, N 可以求出三角形面積的近似值

```
triDEP1 = Triangle[{D0, E0, Part[rp2, 2]}];
areaEDP1 = N[Area[triDEP1], 10]
gr3 = Graphics[{Orange, arc2, Opacity[0.5], Green, triDEP1, pts1},
  Axes → True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  GridLines → Automatic,
  PlotRange → {{0, 2.1}, {-1.1, -0.7}}]
Out[45]= 0.1205366803
```

Fig.15

我們可以得到三角形 EDP_1 的面積為0.1205366803

我們算出各個三角形的面積後，再利用它算出Fig.15中的圖形面積，並比較差異。

LHarea=14×areaAOA$_0$ =1.557646538	求出左邊圖形的總面積
RHarea=13×areaEDP1=1.566976843	求出右邊圖形的總面積
RHarea-Lharea = 0.009330306	左右兩邊的差距
$\frac{\pi}{2}$=1.570796327	$\frac{\pi}{2}$的近似值

我們計算Fig.23左右兩半部與半圓($\frac{\pi}{2}$)的誤差比例如下：

```
LHarea = m × areaLeft
RHarea = n × areaEDP1
RHarea - LHarea
semicircle = N[π/2, 10]
lefterror = semicircle - LHarea
righterror = semicircle - RHarea
Interpreter["ComputedPercent"][lefterror/semicircle × 100]
Interpreter["ComputedPercent"][righterror/semicircle × 100]
Out[47]= 1.557646538
Out[48]= 1.566976843
Out[49]= 0.009330306
Out[50]= 1.570796327
Out[51]= 0.013149789
Out[52]= 0.003819483
Out[53]= 0.8371416%
Out[54]= 0.2431559%
```

左半部三角形總和的誤差%

右半部三角形總和的誤差%

Fig.16

由計算可得知 Fig.15 中右半部的近似值與 $\frac{1}{2}$ 的圓周率較為接近

五、 觀察右半部的誤差

areaSECTOR = $\frac{\pi}{13}$ **− area** AEP_1 **= 0.0005876128→sectors =13 × areaSECTOR**

根據 Fig.24，我們可利用扇形 $ADP_1 - \Delta ADP_1$，就可求出弓形 DP_1 的面積。

我們可以得到弓形 DP_1 的面積為 0.0005876128

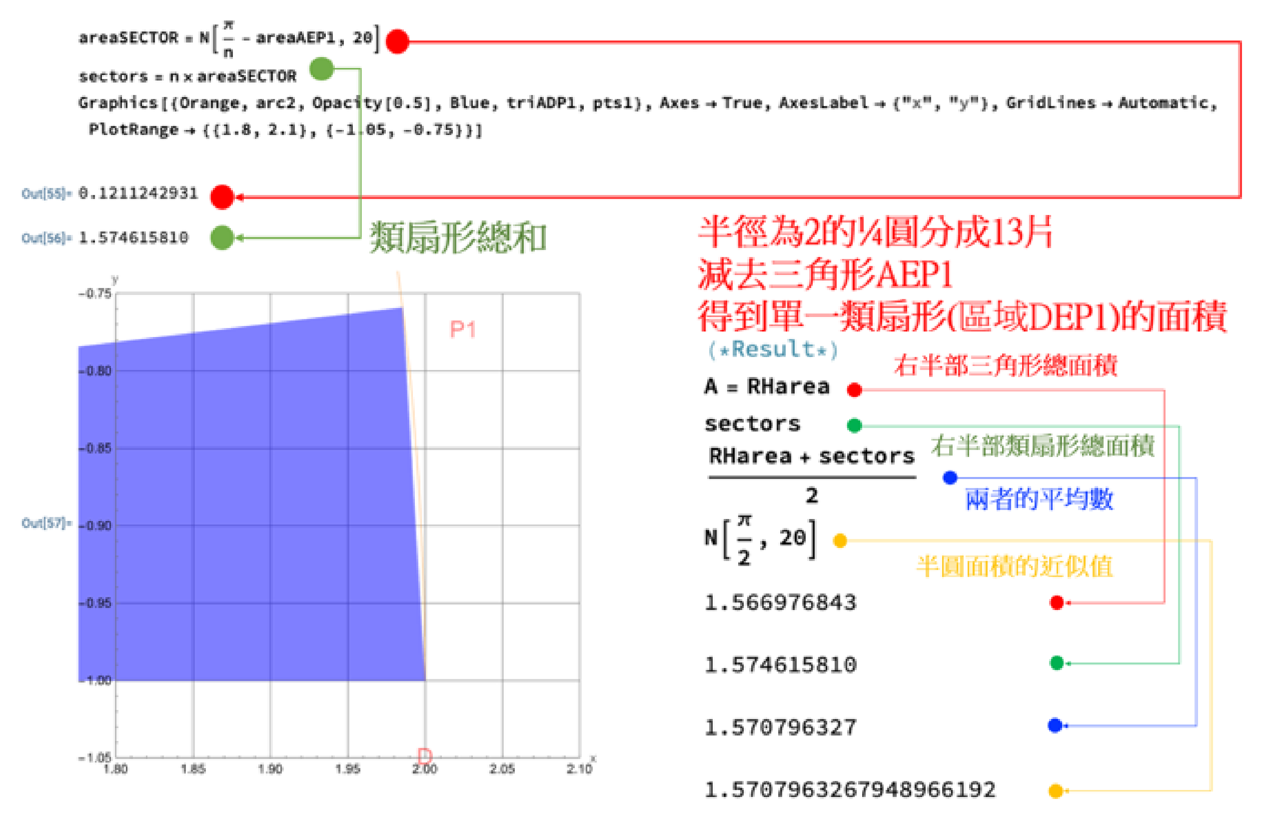


Fig.17

五、結論與生活應用

利用原圖右半部求圓周率近似值的計算方法：我們先算出單一類扇形面積為 0.1205366803，所有類扇形的面積總和為 1.566976843，而 $\frac{\pi}{2} \fallingdotseq$ 1.570796327，於是透過計算我們發現這是一個求圓周率近似值的精準方法。

原作者 William 的畫法如果推廣至分割成更多的扇形，進而求圓周率的近似值時，左半部與右半部的比較結果是否相同？

我們將原作者 William 的畫法分割成更多的扇形，不管分成多少片，只要利用實驗方法依樣畫葫蘆，就可求出精準的圓周率的近似值。我們可以從實驗中發現左半部與右半部的面積差異非常大，原作者 William 使用的方法更為精準。

參考資料

Progessive Arithmetic by William Jame Milne published in 1906. P.818