2024年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：與三相切圓皆相切之最小圓半徑及其圓心座標
一、摘要
本研究探討與三相切圓皆相切之最小圓半徑及其圓心座標，目標是希望在給定三兩兩相切圓的半徑情況下，能求出與此三圓皆相切的圓之圓心座標即圓半徑。以下將分兩部份進行探討。 (1)給定之三圓圓心連心線段圍成的圖形為直角三角形 (2)給定之三圓圓心連心線段圍成的圖形為任意三角形
二、探究題目與動機
我們在瀏覽科展網頁時發現有許多人探討圓相關主題，於是我們突發奇想能否找到其他有關幾何中圓的主題，而當時的課程中也剛好正在教學圓方程式和三角函數的課程，讓我們知道關於幾何在數學上有不同的看待和計算方式，不僅僅是呆板的圖形而已，在不同的方程式、參數式、標準式下有各種不同的形態和長相，如雙曲線、橢圓、交圓、切圓等等，除此之外我們也了解到圓與圓之間的關係一直是研究主題的熱點，而圓的半徑和圓的座標在數學上也有它的重要意義，因此當我們計算到有關三相切圓的題目時，我們就想說是否除了三切圓，我們也能夠用一個方程式的寫法寫出與三圓相切之第四圓的關係式，而經過詢問過老師後，我們對於圓的問題也更加有興趣，因此想更加深入地探究，並在過程中學習更多的知識，發展出新奇的想法和成果，並能夠學以致用，在未來的活動中能夠有所運用。
三、探究目的與假設

探究目的：找到三相切圓皆相切之最小圓半徑及其圓心座標的關係式及通式。

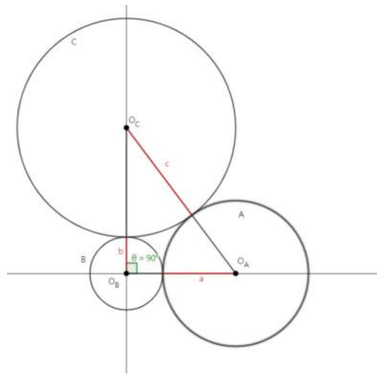
假設：在給予三兩兩相切圓的情況下，我們想要找尋關於與此三相切圓皆相切之最小圓之半徑及其圓心座標之通式。我們希望以給定之三相切圓關係較簡單的情形做發想，首先討論三已知相切圓圓心連線為直角三角形的情況，接著推廣至求平面中任意半徑之三已知相切圓之討論。

四、探究方法與驗證步驟

基本假設

已知三兩兩相切圓: A, B, C，其半徑分別為 a, b, c。令與此三圓皆相切之圓 D 半徑為 d，圓心 $O_D(h,k)$，且圓 B 之圓心 O_B 位於原點。

三圓心連線為直角三角形



三兩兩相切圓之連心線段所圍成的圖形為直角三角形，可將圓 A, C 之圓心 O_A,O_C 設於 x 軸及 y 軸上，分別為 (b+a,0), (0,b+c)，如右圖所示。

圓 D 之半徑 d 可表示為 O_D 與其他三圓之圓心連線段之長度減掉各圓之半徑，得到 d,h,k 之關係式後，可將各等式經移項整理、消去後得到 h,k 之關係式，即:

$$d=\sqrt{(h-0)^2+(k-0)^2}-b=\sqrt{(h-b-a)^2+(k-0)^2}-a=\sqrt{(h-0)^2+(k-b-c)^2}-c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h^2+k^2-d^2=b^2+2bd\\h^2+k^2-d^2=2ad-b^2+2bh+2ah-2ab\\h^2+k^2-d^2=2cd-b^2+2bk+2ck-2bc\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b^2+2bd=2ad-b^2+2bh+2ah-2ab\\b^2+2bd=2cd-b^2+2bk+2ck-2bc\\2ad-b^2+2bh+2ah-2ab=2cd-b^2+2bk+2ck-2bc\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2d(b-a)-2h(b+a)=-2b(b+a) & \cdots\cdots\cdots(\mathbf{1})\\2d(b-c)-2k(b+c)=-2b(b+c) & \cdots\cdots\cdots(\mathbf{2})\\2d(a-c)-2k(b+c)+2h(b+a)=-2b(c+a) & \cdots\cdots\cdots(\mathbf{3})\end{cases}$$

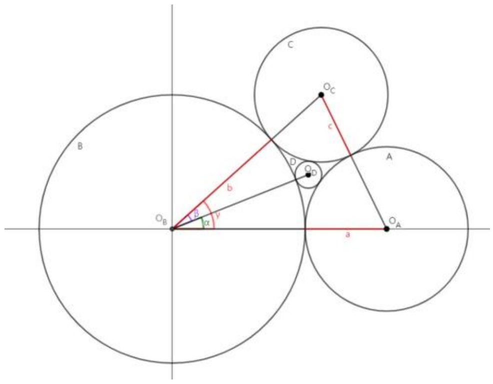
By **(3)** $\times (b-a)$ −**(1)**$\times (a-c)$

$\Rightarrow h(b-c)(b+a)-k(b+c)(b-a)=2b^2(a-c)$

可令$\begin{cases} \mathrm{h}=(b+c)(b-a)t \\ \mathrm{k}=(b-c)(b+a)t-\frac{2b^2(a-c)}{(\mathrm{b}+c)(b-a)}, t\in\mathbb{R} \\ \mathrm{d}=(b+a)(b+c)t-\frac{\mathrm{b}(b+a)}{(b-a)} \end{cases}$

由此，我們得到 h,k,d 之參數式，只要將此三參數式代回 d=$\sqrt{(h-0)^2+(k-0)^2}-b$ 便可得到 O_D與 d。

<u>**三圓心連線為任意三角形**</u>



設圓 A 之圓心 O_A 位於 x 軸且座標為(b+a,0)，圓 C 之圓心則無限制，如圖所示。

由圖我們假設

$\angle O_DO_BO_A=\alpha, \angle O_DO_BO_C=\beta, \angle O_AO_BO_C=\gamma$

$\because \angle O_AO_BO_C=\angle O_DO_BO_A+\angle O_DO_BO_C$

$\therefore cos\gamma = cos\,(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$

$\Longrightarrow sin\alpha sin\beta = cos\alpha cos\beta - cos\gamma$

$\Longrightarrow (1-cos^2\alpha)(1-cos^2\beta)=cos^2\alpha cos^2\beta - cos\alpha cos\beta cos\gamma + cos^2\gamma$

$\Rightarrow cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 + 2cos\alpha cos\beta cos\gamma$

又根據餘弦定理可得

$$cos\alpha = \frac{(a+b)^2+(b+d)^2-(a+d)^2}{2(a+b)(b+d)} = 1-\frac{2ad}{(a+b)(b+d)}$$

$$cos\beta = \frac{(b+c)^2+(b+d)^2-(c+d)^2}{2(b+c)(b+d)} = 1-\frac{2cd}{(b+c)(b+d)}$$

$$cos\gamma = \frac{(a+b)^2+(b+c)^2-(a+c)^2}{2(a+b)(b+c)} = 1-\frac{2ac}{(a+b)(b+c)}$$

代回上式$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 + 2cos\alpha cos\beta cos\gamma$ 經過計算可得

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=2(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd})$

又在兩邊同時加上$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$

可得 $2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2})=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})^2$

以上為我們對索迪公式之證明，透過此公式我們可以輕易地計算出圓 D 和其他三圓半徑的關係式，而我們也須藉由此公式計算出圓 D 的圓心 O_D 座標

圓心 O_D 以極座標表示

O_D=[b+d, α]= ((b+d)$cos\alpha$, (b+d)$sin\alpha$)

我們知道 $cos\alpha=1-\frac{2ad}{(a+b)(b+d)}$ 又 $1-cos^2\alpha=sin^2\alpha$

所以我們可以求得$sin\alpha$=$\sqrt{\frac{4ad}{(a+b)(b+d)}(\frac{ad}{(a+b)(b+d)}-1)}$

再將$cos\alpha, sin\alpha$帶回座標可得

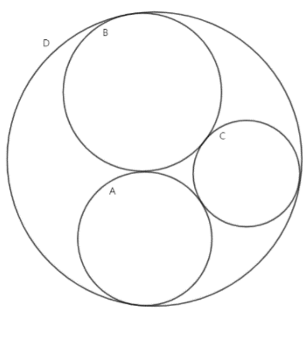
O_D =[$(b+d)-\frac{2ad}{(a+b)}$, $\sqrt{\frac{4ad(b+d)}{(a+b)}\left(\frac{ad}{(a+b)(b+d)}-1\right)}$]

帶入 $2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2})=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})^2$計算

可得半徑 d=$\left|\frac{abc}{ab+ac+bc\pm2\sqrt{abc(a+b+c)}}\right|$

但此處我們不將半徑 d 以 a,b,c 表示法帶回圓心座標，因為如此不會有助於計算，反而會讓方程式變得更加冗長，因此我們選擇以關係式來表示，以計算出半徑 d 的值後，再計算圓心。

除此之外我們也發現我們計算出來的半徑 d 值有大小之分，表示相切於三圓的圓 D 不只有我們一開始所假設的內切三圓的小圓，還有另一個半徑更大，外切於三圓的大圓，如右圖所示。而決定圓 D 是外切或是內切的因素在於半徑 d 的大小，較大的為外切圓，較小的為內切圓。



五、結論與生活應用

結論：

1. 三圓心連線為直角三角形

h,k,d 之參數式$\begin{cases} \mathrm{h}=(b+c)(b-a)t \\ \mathrm{k}=(b-c)(b+a)t-\frac{2b^2(a-c)}{(\mathrm{b}+c)(b-a)},\ t\in\mathbb{R} \\ \mathrm{d}=(b+a)(b+c)t-\frac{\mathrm{b}(b+a)}{(b-a)} \end{cases}$

只要將此三參數式代回 d=$\sqrt{(h-0)^2+(k-0)^2}-b$便可得到 O_D 與 d。

2. 三圓心連線為任意三角形

經過推倒可以推算出圓 D 半徑 d=$\left|\frac{abc}{ab+ac+bc\pm2\sqrt{abc(a+b+c)}}\right|$

圓心的座標 O_D 為$\left((b+d)-\frac{2ad}{(a+b)}\right.$，$\left.\sqrt{\frac{4ad(b+d)}{(a+b)}\left(\frac{ad}{(a+b)(b+d)}-1\right)}\right)$而決定圓 D 為外切或內切在於半徑 d 公式中的正負號，正號為外切，負號則為內切。

應用：在這個網路的時代下，數學語言已是必備的工具，不管是在遊戲設計上、圖形處理、電腦繪圖都需要數學語言的輔助，而我們探討的成果也能為其中的建模和設計盡一份心力，除此之外在工程上我們的研究成果也能對它有所幫助，如行星齒輪的設計，行星齒輪是齒輪結構的一種，由一或多個外部齒輪繞行著一個中心齒輪旋轉，如同行星公轉一般，而形成的樣式就如同我們的外切圓圖形，行星齒輪擁有很高的扭舉，因此有十分良好的減速系統，且行星齒輪僅是由多個齒輪構成的齒輪結構，因此成本並不高，能被廣泛運用在各種領域，但缺點就是其機械結構較難以製造，對工藝有一定的要求，而我們的研究成果對於行星齒輪的缺點的改進能夠做

到些微的貢獻，搭配自動的機械設備和 AI 科技，只要輸入我們的方程式和相關的關係式，就能設計出多種的行星齒輪款式，如法蘭型、直角型等等，也希望能夠把我們的研究成果作為一枚小小的行星齒輪，為我們這科技世界貢獻一分心力。

參考資料

項武義. (2009). *基礎幾何學* (初版). 五南圖書出版股份有限公司.

索蒂圓. (n.d.). 百度百科. https://baike.baidu.hk/item/%E7%B4%A2%E8%92%82%E5%9C%93#ref_[1]_0

行星齒輪. (n.d.). 維基百科. https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%8C%E6%98%9F%E9%BD%BF%E8%BD%AE

Solara570. (2020, February 14). 四圓相切与笛卡尔定理（上篇）. 知乎. https://zhuanlan.zhihu.com/p/105819963