2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

■國中組　□普高組　□技高組　成果報告格式

題目名稱：是誰決定了我們的命運？--鬼腳圖的命中注定

一、摘要

本作品以日常生活中常見的「鬼腳圖」為主題，深入探討其背後所蘊含的數學規則與特性。我們從三個面向切入研究：唯一性、奇偶性與隨機性，並建立鬼腳圖與一對一函數的對應關係，說明其具有唯一對應的結構。

進一步，我們以 LINE 的「爬梯子」抽籤功能為例，分析其系統所產生的鬼腳圖是否公平。實驗顯示，若橫線數過少，將導致起點至終點的機率分布不均，形成明顯的偏差，並非完全隨機。惟系統透過隨機調整終點位置，有效消弭此問題，確保抽籤公平性。

最後，我們觀察並破解了一個以鬼腳圖為主題的數學魔術，發現其原理來自模運算與點對稱的設計。我們透過排列組合與對稱性的分析，不僅重現了這個魔術，還推導出點對稱鬼腳圖的數量規律，並建立一組遞迴公式與一般項公式來計算不同點數下的圖形數量。

本研究展現了鬼腳圖背後的數學奧秘，從日常應用、抽籤公平性到魔術設計，證明數學不僅存在於課本，更深藏於生活與娛樂之中。

二、探究題目與動機

鬼腳圖是一種簡單有趣的遊戲，常見於日本與台灣文化中，尤其在 LINE 的「爬梯子」功能中被廣泛應用。然而，在一次日常使用中，我們好奇地發現：若橫線太少，好像第一位就走不到最後一個終點，這樣的設計真的公平嗎？

此外，我們在學校的魔術社觀察到一個與鬼腳圖結合的魔術，觀眾任意選擇起點與終點、隨機擺放紙卡，最後卻總能「命運般地」走到對方身邊，讓我們驚嘆的同時，也激起了想要破解其中數學原理的興趣。

於是，我們決定深入探討鬼腳圖，從基本規則出發，分析它的數學結構、公平性與隨機性，並破解其中的魔術機關，看看一個簡單的遊戲背後，是否藏有豐富的數學奧秘？我們相信，從這樣一個看似簡單的圖形中，能夠挖掘出許多有趣且深具教育意義的數學概念。

三、探究目的與假設

1. 瞭解鬼腳圖的數學結構

　　透過分析鬼腳圖的走法與規則，探究其在對應性、奇偶性與隨機性上的數學特徵，並進一步理解其為一種一對一（1-1）的函數關係。

2. 檢驗 LINE 爬梯子的公平性

　　觀察 LINE 系統產生的鬼腳圖，在不同橫線數量下是否會造成某些位置抽中某些結果的機率失衡，進而思考其是否為一個公平的抽籤方式。

3. 破解鬼腳圖魔術背後的原理

透過觀察與實驗分析鬼腳圖魔術道具的運作機制，了解其利用了哪些數學概念(如模運算、點對稱與排列組合)，達成「看似隨機，實則設計」的神奇效果。

4. 研究鬼腳圖路徑的中心對稱(點對稱)性質：利用視覺圖形化表達排列組合，進一步推導 n-n 所有路徑組合的一般化公式。

四、探究方法與驗證步驟

1. 鬼腳圖的規則與特性

(1)唯一性：鬼腳圖的規則是從上往下走，遇到橫線就轉向，最後一定會走到某個終點。我們可以想像 10 個人同時由起點往下走，遇到橫線時，兩條路徑的人互相交換位置，10 條路徑永遠保持 1 人在走，所以是 1-1 函數。

(2)奇偶性：我們在記錄某條線經過的橫線數目時發現，若某條路徑經過偶數條橫線，它的終點保持不變；若經過奇數條橫線，它的終點會變成相鄰的出口。也就是在相同結果的橫線選擇上，必是全都奇數，或全都偶數。

(3)隨機性：只要橫線是隨機畫的，那麼每個起點都有機會到達某個終點。

2. Line 的爬梯子

LINE 內建的「爬梯子」可以讓用戶在群組裡自行設定選項、並進行「線上抽籤」，讓系統隨機選出人選，是許多人拿來分配任務、決定懲罰或抽獎的實用工具。首先，我們選擇幾名成員(起點)，再視個人需求輸入「抽籤選項」(終點)後，系統就自動幫我們畫出鬼腳圖，並跑出結果(圖 1)。

看似正常的鬼腳圖遊戲，在我們在試玩後發現，橫線數是由鬼腳圖決定的，以 5 名成員為例，會出現 6~16 條橫線不等的情況，這導致一個後果，當橫線數過少時，不利於第一位走到最後一個結果的位置。舉一個極端例來說：5 條路，只有 3 條橫線時，第一位是走不到最後一位 E 的(圖 2)。這不就代表鬼腳圖是不公平的遊戲？

是的，以 8 條橫線為例，位置 1 走到 A 與 E 的機率，分別為 37%與 5%<註 1>，差別巨大。可見鬼腳圖在橫線數不夠多時，是一個不公平的遊戲。

圖 1

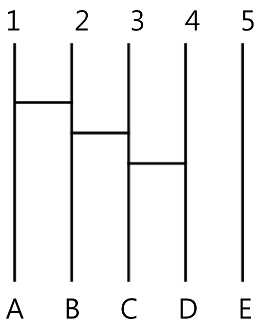

圖 2

.	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5
A	37%	30%	19%	10%	5%
B	29%	26%	20%	14%	10%
C	19%	20%	21%	20%	19%
D	10%	14%	20%	26%	29%
E	5%	10%	19%	30%	37%

圖 3

但 LINE 的「爬梯子」很巧妙的避開這個問題，當我們輸入「抽籤選項」後，系統隨即將 5 個選項(終點)重新「隨機分配」(圖 4)，我們無法指定終點的位置，導致其機率並非鬼腳圖的橫線所完全決定。因此橫線數的多寡，並不會影響其最終結果的機率。它仍然是可作為一個公平的抽籤遊戲。

圖 4

3.必勝鬼腳圖魔術

我們在某次魔術社團中，看到老師表演一個關於鬼腳圖的魔術，大為震驚，決定來研究它。首先，魔術師拿出一張紙(圖 5)，請兩位觀眾分別選擇起點(A~E)與終點的任一點，並說明兩位觀眾是否有默契，能從茫茫人海中找到對方呢？而誰來決定中間的路徑？就交由鬼腳圖決定吧！

於是分別拿出 4 張紙卡(如圖 6)，讓觀眾隨意擺放其中的 4 個問號格子內，並可以隨意將卡紙旋轉。擺好後再次詢問，是否還要更動它？得到確定不動之後，魔術師說：在這麼隨機混亂的鬼腳圖路徑中，最後會走到哪裡？就交由命運決定吧！

果不其然，從起點走到終點後，兩位觀眾選擇的竟然碰面了！

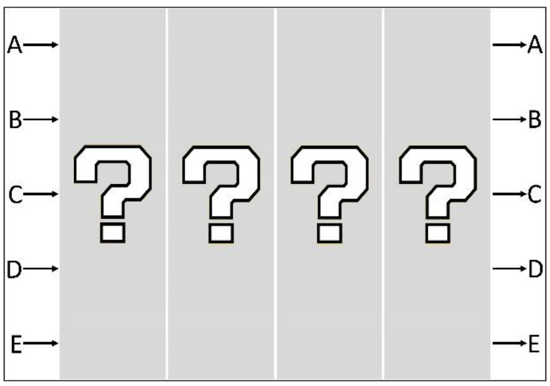

圖 5

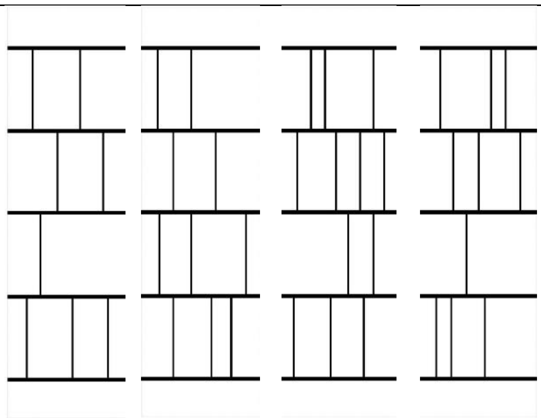

圖 6

這就是命運的選擇嗎？顯然不是，必是靠數學的巧妙規劃。於是我們跟老師要了魔術道具，來好好研究它。

原來，紙卡總共 5 張，每一張都有代表它最後的路徑，如(圖 7)，代表向下 1 格，只要經過這個紙卡，路徑必然往下一格。為了方便表達這個路徑，不要被複雜的路經干擾，我們將 5 張紙卡簡化為(圖 8)。

這時候我們就可以破解魔術了，當觀眾選擇 A→B 時，代表最後需往下 1 格，只要從 5 張紙卡(1+2+3+4+5)拿掉第 4 張，剩下 4 張紙卡的總和便是同餘 1(mod5)，不管如何擺，最後終能成功找到對方。

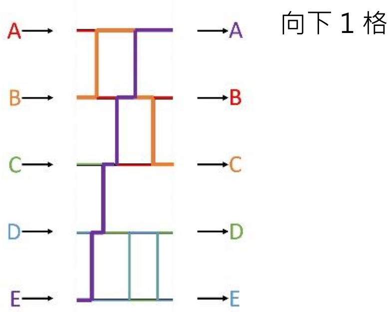

圖 7

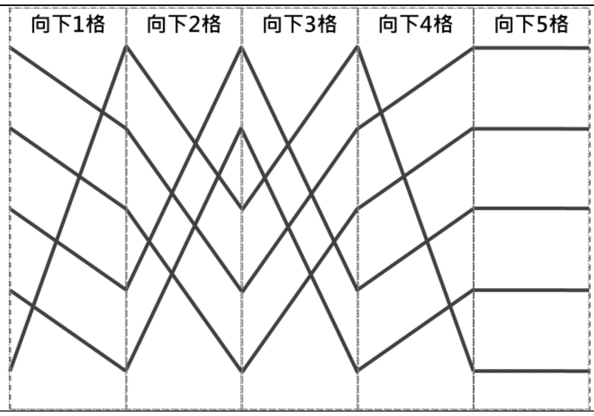

圖 8

接著，我們對於觀眾可以將紙卡隨意旋轉，路徑仍然相同感到非常好奇。例如(圖 9)，在經過 180°的旋轉後，圖形不變，這在數學稱作「點對稱」或是「中心對稱」圖形。那麼 5-5 有幾種點對稱圖形呢？

首先，「5 點對 5 點」的畫法總共有$5! = 120$種，數量稍多，我們先化繁為簡，從簡單的來看。「2 點對 2 點」有 2 種、「3 點對 3 點」有 4 種(圖 10)、「4 點對 4 點」有 10 種(圖 11)。

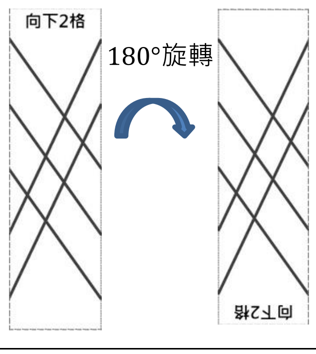

圖 9

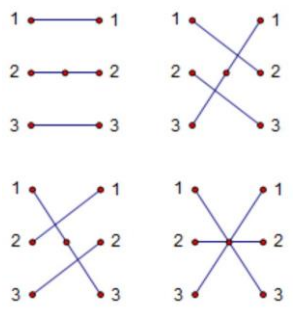

圖 10

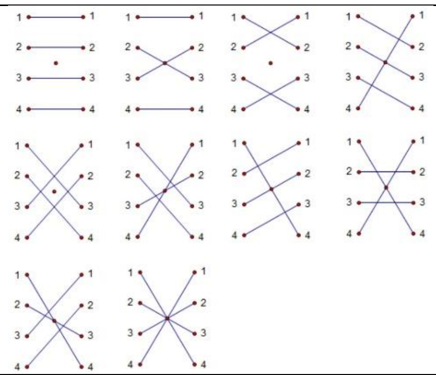

圖 11

一開始，我們將所有情況一一畫出，再經過 180°的旋轉後，觀察圖形有無改變來判斷。我們發現雖然可以一網打盡，但太沒效率了。決定改採用排列組合的方式，從 1-1、1-2、1-3 等分別來找，我們發現一個畫法的規則：(1)通過旋轉中心的線，必為點對稱、(2)沒有通過旋轉中心的線，必須要有另一條跟它搭配，才能成為點對稱。以「4 點對 4 點」為例，1-4 這條通過旋轉中心，單獨便可成立，可是 1-2 這條，需有 3-4 跟它配，才能成為點對稱圖形。有了這 2 條規則，我們便很快畫出「5 點對 5 點」有 26 種線對稱圖形。(圖 13)

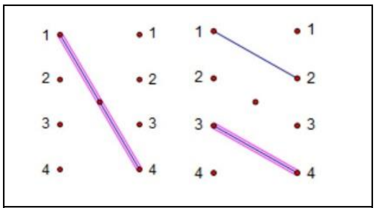

圖 12

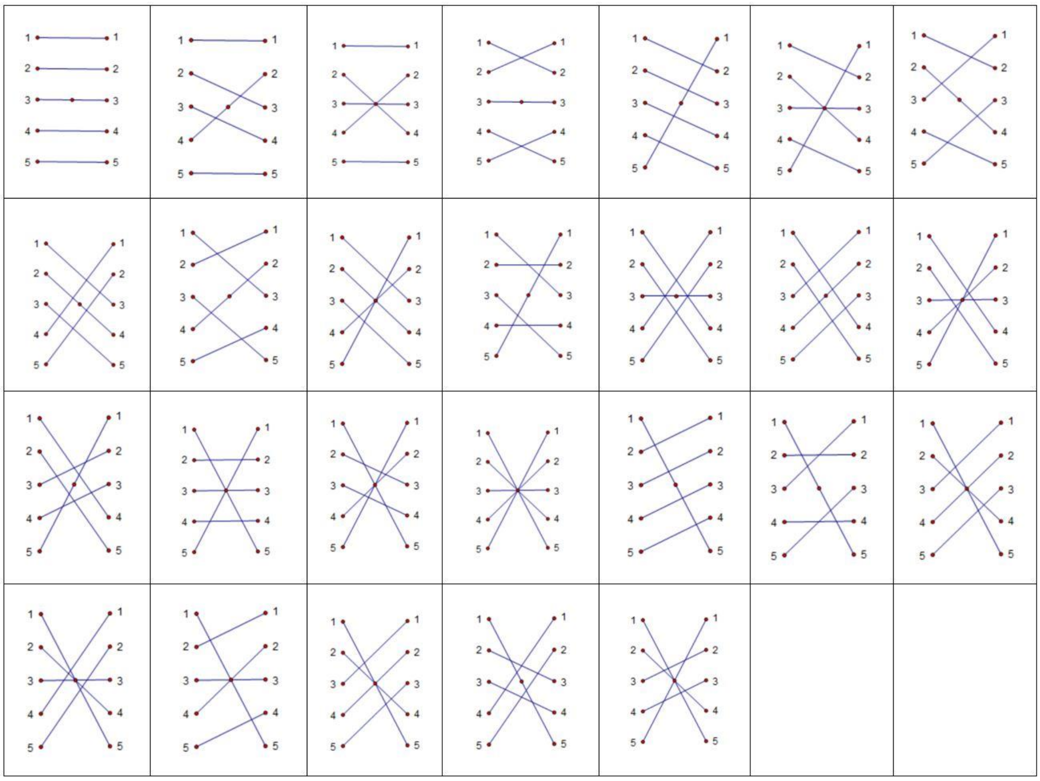

圖 13

而「6 點對 6 點」想進一步推展時，我們更發現 1-1~1-5 的組合數，竟然與「4 點對 4 點」時一樣多(圖 14)。於是我們發現，若有錯位情形，其實與沒有錯位的數量是一樣的。關鍵在於，每個數字在連到右邊時，通過旋轉中心的數量只有 1 個，同樣的，沒通過中心的必有(n-1)個，所以必然和沒有錯位時，數量相同。

最後剩下的 1-6，因為通過旋轉中心，其數量必然與「5 點對 5 點」數量相同(圖 15)，於是我們成功找到規律：「6 點對 6 點」=「4 點對 4 點」× 5+「5 點對 5 點」。

若寫成一個遞迴數列即為：

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$

$$\boldsymbol{a_2 = 2}$$

$$\boldsymbol{a_n = a_{n-2} \times (n-1) + a_{n-1}}，n \geq 3$$

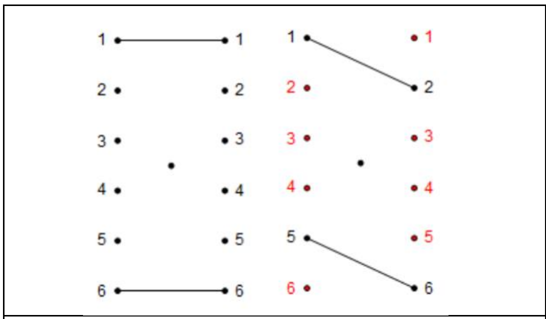

圖 14

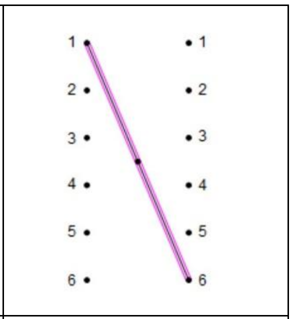

圖 15

更進一步，我們推導出一般項$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{k!\cdot 2^k\cdot(n-2k)!}$ ，並驗證無誤。

五、結論與生活應用

透過本次對鬼腳圖的深入探究，我們有以下幾點結論與收穫：

1. 鬼腳圖其實是 1-1 對應的函數圖形，每一條起點路徑都會對應到唯一的終點，這說明了它的唯一性與可預測性。
2. 鬼腳圖若橫線數太少時，會導致機率分布不均，使得起點與終點間的機會不公平。
3. LINE 的爬梯子功能透過終點重新隨機排列，巧妙地解決了橫線數量導致的不公平問題，是設計上的一大亮點。
4. 鬼腳圖魔術的背後其實是模數運算與圖形對稱的數學原理，讓我們驚豔數學與表演的結合之美。

生活應用與啟發

- **公平機制設計**：鬼腳圖的原理讓我們了解，在設計抽籤或分配任務工具時，隨機性的掌握與分布平衡是非常重要的。像 LINE 這樣的平台就運用了巧妙的數學邏輯來維持公平性。
- **魔術與數學結合**：我們驚喜地發現，很多魔術其實是靠數學原理設計的，這讓數學不再只是枯燥的公式，而是充滿創意與驚喜的表演工具。
- **數學建模與推論能力**：從研究對稱圖形的遞迴規則到推出一般項公式，我們體會到如何透過實例歸納規律，並用數學模型去描述與驗證現象，這對未來的學習幫助很大。

參考資料

1.<註 1>來源 https://mtk.tw/用鬼腳圖來抽籤/

2.嘉義縣第五十四屆中小學科學展覽會作品說明書-走出鬼腳圖

3. LINE 官方幫助中心，〈爬梯子使用說明〉 https://line-tw-official.weblog.to/archives/70678810.html

4. 高雄市立美濃國中魔術社教材（由張文彬老師指導）