

2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組成果報告格式

題目名稱：平方差與立方差的變身

一、摘要

平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 與立方差公式 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 是代數運算的重要基礎。其推導過程體現出數學邏輯與轉化思想。平方差公式推導基於多項式乘法法則，將 $(a+b)(a-b)$ 展開，通過合併同類項，消去中間項 ab 與 $-ab$ ，直接得到 $a^2 - b^2$ ；也可從幾何視角，借助大正方形（邊長為 a ）挖去小正方形（邊長為 b ）後剩餘圖形的面積拼接，直觀詮釋公式的幾何意義。立方差公式推導則通過構造法，對 $a^3 - b^3$ 進行變形，將其轉化為 $(a-b)a^2 + (a-b)b^2 + (a-b)ab$ ，再分組提取公因式，逐步推導出 $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ；幾何上，可利用邊長為 a 和 b 的立方體體積差，通過分割、重組小立方體，解釋公式中各項係數與結構的合理性。這些推導過程不僅揭示公式的本質，更為高階代數運算、因式分解等數學問題提供理論依據與解題思路。

二、探究題目與動機

代數運算體系需要簡潔高效的運算規則，平方差與立方差公式作為基礎恒等式，其推導過程是建構多項式乘法、因式分解理論框架的關鍵環節。通過探究推導過程，能夠揭示代數運算式內在的結構規律，完善代數理論體系的邏輯鏈條，為更複雜的代數恒等式推導和數學證明奠定基礎。在工程與物理領域，公式能簡化複雜計算。如建築工程中計算不規則立體結構的體積差，或物理學中推導動能、勢能轉化公式時，立方差公式可快速處理高次冪運算；平方差公式則常用於信號處理中對波動方程的化簡，提升資料處理效率。

我們本次研究的源起，正是對數學公式的濃厚興趣與深度探索欲。立方差公式作為代

數領域的經典公式，其獨特之處在於巧妙地架起了代數運算與立體幾何的橋樑——公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 中的每一項，都能在三維空間中找到具象化的對應。通過將邊長為 a 與 b 的立方體體積差進行視覺化拆解，我們不僅能直觀地理解公式中 a^2 、 ab 、 b^2 等代數結構如何轉化為立體圖形的面積與體積關係，更能借此加深對空間維度、圖形變換的認知。這種跨領域的思維碰撞，不僅強化了我們對立體幾何中空間想像與結構分析的能力，也促使我們從幾何直觀的角度重新審視數學分析中的抽象運算邏輯，進一步深化對代數與幾何內在統一性的理解，感受數學學科的精妙與魅力。

三、探究目的與假設

探究目的：

我們研究平方差與立方差公式的核心目的，是通過更加直觀的幾何平面、立體圖形的方式，將原本屬於國中學習範疇的公式進行深入淺出的解讀與轉化，運用國小生所熟悉的生活場景、直觀圖形等元素，將抽象複雜的代數式運算以簡單易懂的方式展現出來，使得國小生也可以輕鬆理解其公式，從而也可以激發大家對於數學的好奇和探索欲。

四、探究方法與驗證步驟

我們將實驗分為四個：平方差公式、立方差公式、差平方公式、差立方公式。我們打算使用小正方體來協助推導，借助平面圖形和立體圖形，將代數公式轉化為直觀的幾何模型。對於平方差公式，利用大正方形中挖去小正方形的面積差，通過圖形割補重組，直觀呈現面積與公式各項的對應關係；對於立方差公式，使用兩個不同邊長的立方體，通過切割、拼接等方式來進行解釋。為了驗證我們的公式推導是否正確，因此我們會取幾個數字帶進去驗證一遍。

1、平方差公式

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ，我們運用梯形公式 (上底+下底) \times 高 $\div 2$ 可以得到

$\frac{(a+b)(a-b)}{2} \times 2$ ，化簡即可得到 $(a+b)(a-b)$ 。驗證：我們取 $a=10$ ， $b=6$ ，則 $100-$

$36=16 \times 4=64$ ，帶進去使得等號成立，因此此公式是對的。

2、立方差公式

立方差公式是求大正方體減去小正方體後的剩餘體積， $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) =$

$(a-b)a^2 + (a-b)b^2 + (a-b)ab$ ，提取公因式得： $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。驗證：我們取

$a=3$ ， $b=2$ ，則 $27-8=9+4+6=19$ ，等號成立，因此公式正確。

3、差平方公式

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，因為 $2ab$ 會重複一塊 b^2 ，所以應加上一個 b^2 ，

驗證：我們取 $a=5$ ， $b=3$ ，則 $2^2=25-30+9=4$ ，等號成立，因此公式正確。

4、差立方公式

與立方差公式不同的是，立方差公式是求剩餘體積，而完全立方差公式是求中間小正方體

體積。 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

應為有兩塊長方體會重複一塊小長方體，因此還要再加上一塊小長方體

五、結論與生活應用

結論：

$$\text{平方差公式： } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\text{差平方公式： } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{立方差公式： } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{差立方公式： } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

生活應用：

搬家時的面積估算：搬家時發現兩個不同尺寸的正方形紙板，想知道它們的面積差是多少？已知大紙板邊長 $a=576\text{cm}$ ，小紙板邊長 $b=424\text{cm}$ ，用平方差公式計算面

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= 152 \times 1000 = 152000$$