【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中（職）組成果報告表單

題目名稱：佔地為王

一、摘要：

在本研究中，我們探討在(m×n)的方格中，如何使用最少的”兵”填滿方格的通解。**我們找到了最經濟的填充方法，並能推廣到任意平面上的情況**。最特別的是，我們發現在4×4的方格中，兵不會重複控制到同一個方格，所以我們使用十字形五連方的圖形進行密鋪，並且最上面和最左邊的輔助兵不用算進去，然後方格右下角落有兩個輔助兵只控制一個方格的話，就只需要一個輔助兵，而其他方格則不變。

二、探究題目與動機

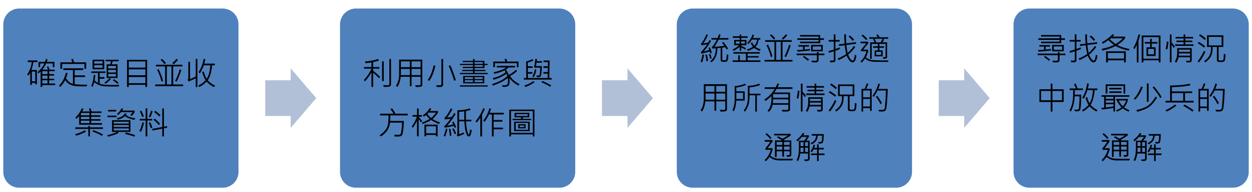
這個題目是取自於台灣區高中數學競賽（TRML）中的思考賽，且這個題目是由八皇后問題衍生的問題，而題目是把一個兵放方格中，兵可以控制本格及上、下、左、右等格，並且題目只有到（3×n）的方格中，兵最少可以放幾個，才可以填滿方格的通解，所以我們好奇如果兵在（m×n）的方格中，兵最少可以放幾個，並加以研究。

三、探究目的與假設

找出在$(m \times n)$的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解（$(m,n) \in N$）。

四、探究方法與驗證步驟

一、研究流程



(一)確定題目並收集資料。

(二)利用小畫家與方格紙作圖。

(三)尋找各列方格中，可以放最少的兵的數量，並用紙、筆紀錄。

(四)找出在（1×n）的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

(五)找出在（2×n）的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

(六)找出在（3×n）的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

(七)找出在（4×n）的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

(八)找出在（5×n）的方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

(九)以此類推，然後找出這些通解的規律，並找出在（m×n）的方格中，最少要放幾個兵才可以把全部方格填滿的通解。

二、名詞定義與研究結果

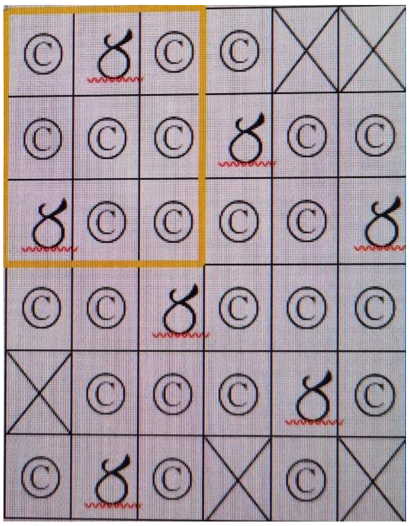
下表中，我們定義 f(m,n)為使用最少的兵的數量。

$f(m,n)$		一般式通解
$m=1$	$f(1,1)=1$ $f(1,2)=1$ $f(1,3)=1$ $f(1,4)=2$ $f(1,5)=2$ $f(1,6)=2$ $f(1,7)=3$ $f(1,8)=3$ $f(1,9)=3$ $f(1,10)=4$	$f(1,n)=\left[\frac{(n+2)}{3}\right]$
$m=2$	$f(2,1)=1$ $f(2,2)=2$ $f(2,3)=2$ $f(2,4)=3$ $f(2,5)=3$ $f(2,6)=4$ $f(2,7)=4$ $f(2,8)=5$ $f(2,9)=5$ $f(2,10)=6$	$f(2,n)=\left[\frac{(n+2)}{2}\right]$
	$f(3,1)=1$	

$m=3$	$f(3,2)=2$ $f(3,3)=3$ $f(3,4)=4$ $f(3,5)=4$ $f(3,6)=5$ $f(3,7)=6$ $f(3,8)=7$ $f(3,9)=7$ $f(3,10)=8$	$f(3,n)=\left[\frac{(3n+4)}{4}\right]$
$m=4$	$f(4,1)=2$ $f(4,2)=3$ $f(4,3)=4$ $f(4,4)=4$ $f(4,5)=6$ $f(4,6)=7$ $f(4,7)=7$ $f(4,8)=9$ $f(4,9)=10$ $f(4,10)=10$	$f(4,n)=n+1-\left[\frac{(n-1)}{3}\right]+\left[\frac{(n-2)}{3}\right]$
$m=5$	$f(5,1)=2$ $f(5,2)=3$ $f(5,3)=4$ $f(5,4)=6$ $f(5,5)=7$ $f(5,6)=8$ $f(5,7)=10$ $f(5,8)=11$ $f(5,9)=12$ $f(5,10)=14$ $f(5,11)=15$	$f(5,n)=n+\left[\frac{(n+2)}{3}\right]$
	$f(6,1)=2$	

$m=6$	$f(6,2)=4$ $f(6,3)=5$ $f(6,4)=7$ $f(6,5)=8$ $f(6,6)=10$ $f(6,7)=11$ $f(6,8)=13$ $f(6,9)=14$ $f(6,10)=16$ $f(6,11)=17$ $f(6,12)=19$	$f(6,n)=n+\left[\frac{(n+2)}{2}\right]$

而在$m=6$之後的通解，因為目前沒有發現規律，並且因為4×4的方格中，沒有兵重複控制，所以我們用十字形五連方的圖形進行密鋪，而我們發現隨便框一個方格都跟我們的數據幾乎一樣，所以我們想出另一種方法來尋找通解。而這個方法是把$f(m,n)$設為$f((n+k),n)$（其中$k\in Z$、$k\geq 0$），然後使用十字型五連方密鋪的圖來進行觀察。而我們發現觀察是以4×4的方格為完美圖形為基礎，所以最上面和最左邊的輔助兵不用算進去。



圖例ȣ:兵，©:兵控制的範圍

說明：已知 (4×4)的方格為完美圖形為基礎，若要求(5×5)的方格，則需要ȣ的數量即為$((5+1)\times(5+1))$的方格內的數量，而在(3×3)的方格(橘色的線框起來的方格)中有兩個輔助兵指控制一個方格，所以只要方格右下角落有兩個輔助兵只控制一個方格的話，就只需要一個輔助兵，而其他方格則不變。

k = 0時的情況

$K=0$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
a_n第n層	0	1	1	2	1	2	3	3	4	3
S_n前n層	0	1	2	4	5	7	10	13	17	20
多餘的兵數量	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
最少的兵		1	2	3	4	7	10	13	17	19

而$f(n,n)$**的通解為**$a_n=\left[\frac{(n+1)^2}{5}\right]+\left[\sin\frac{(2n+8)\pi}{5}\right]+\left[\sin\frac{2n\pi}{5}\right]+1$。

五、結論與生活應用

在本研究中，我們首先把$(m\times n)$的方格中，把m值固定，但是在$m=7$時就沒有找到規律，所以換一個用$(n\times(n+k))$的方格來進行研究，而我們使用十字型五連方密鋪的圖來進行觀察，並且以4×4的方格為完美圖形為基礎，所以上排跟左邊的輔助兵不用算進去。之後我們還發現方格右下角落有兩個輔助兵只控制一個方格的話，就只需要一個輔助兵，其他方格則不變，而礙於時間的關係，我們只做到$k=4$時的通解。雖然沒有找出完整通解，但是我們已經找出了通解的一些性質，所以我們希望未來可以找到$(m\times n)$的方格的完整通解。找到通解之後，我們打算找出在$(m\times n\times z)$的立方格中，最少可以放幾個兵才可以把全部立方格填滿的通解(其中z為正整數)，而兵則可以控制前後上下左右的方格。**本研究可推廣到空間中，應用在街道上設置監視器到零死角的最小數目，以及大樓空間（如教室）中最經濟的廣播器數量**。

參考資料

1. 九九文教基金會（2008）。TRML 思考賽。2020 年 12 月 28 日，取自 http://e-tpd.kssh.khc.edu.tw/board.php?courseID=162&f=doc&cid=2009。
2. 永春高中數學科（2017）。**階城盃第 9 期**。臺北市：永春高中數學科教學研究會出版。
3. 作者不詳（2020）八皇后問題。2020 年 12 月 29 日，取自 https://programming.im.ncnu.edu.tw/exapmle_for_java/9.htm。