【2021 全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中（職）組 成果報告表單

題目名稱： 蜘蛛網真能捉到獵物嗎？捕捉到獵物的機率為何？

一、摘要：

本作品源自觀察到生活中蜘蛛網的間距寬鬆，疑惑其捕捉到獵物的機率為何，因此將蜘蛛網簡化為等間距平行線，於 MSTE 網路平台測試不同針形（假設獵物只具外型）掉落至等距平行線時的接觸機率，在一維下探討接觸機率（蜘蛛網捕捉到獵物的機率），後增加維度，使其符合實際蜘蛛網與獵物之間的關係，利用實驗及投影法，計算能捕捉到的獵物機率。

二、探究題目與動機

蜘蛛網是蜘蛛獵捕的一項利器，但觀察後卻發現：昆蟲的體積小，蜘蛛卻不會織出足夠細密的網以捕捉每隻進入蜘蛛網的昆蟲，我們不免疑惑，這樣的蜘蛛網能捕捉到足夠的食物嗎？捕捉成功的機率有多少呢？

於是，先在較低維度下以布豐投針的模型實驗，再增加維度，將蜘蛛網視為間距相等的平行線，昆蟲側面則不計厚度以不同紙片表示，當紙片接觸線平行線時，視為「捕捉成功」，實驗將紙片以各種角度飛入時的接觸機率，並以數學式證明。

三、探究目的與假設

一、當平行線間距為 n，不同針形的接觸機率？

二、當平行線間距為 n，紙片以不同角度飛入，不同紙片接觸機率分別為何？

四、探究方法與驗證步驟

討論不同針形的掉落命中機率，並以網路測試平台 MSTE 測試。步驟如下：

1、將不同針形（設定周長相等）繪製於 MSTE 布豐投針測試器。

2、選擇投擲 100000 次後，得到不同形狀的針與線接觸的機率值。

表一、不同針形掉落於平行線時的接觸機率比較(平行線間距 1 單位長)

針形	周長(單位長)	投針數	交點數	接觸機率
正三角形	1	100000	63098	0.63098
正方形	1	100000	63770	0.63770
正五邊形	1	100000	62902	0.62902
正六邊形	1	100000	62932	0.62932

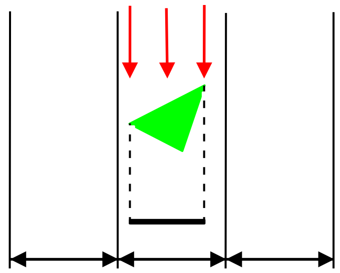
一、不同針形在一維下的接觸機率理論值計算

（一）平均投影徑

一束平行光自 x 軸正無窮遠處往負 x 軸方向發射，今給定一平面圖形 P ，並將屏幕 Q 置於負 x 軸無窮遠處。當 P 旋轉，Q 上所映的陰影長度也會隨之改變；P 旋轉 360 度期間，Q 上陰影長度的平均值即為平均投影徑。[4]

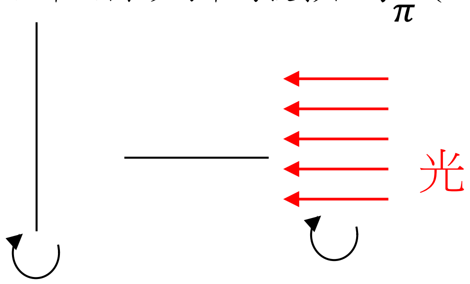
（二）平均投影徑與相交直線機率

將一圖形投入平面中，與等距 D 的直線相交的機率可以看做其$\dfrac{平均投影徑}{D}$。

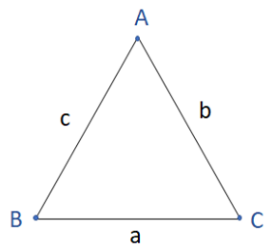


圖一、平均投影徑與投針示意圖（資料來源：研究者繪）

（三）凸平面圖形的平均投影徑為$\dfrac{S}{\pi}$（S 為周長）



圖二、線段投影裝置（資料來源：研究者繪）



圖三、三角形示意圖（資料來源：研究者繪）

1、證明三角形情況

將平行光對齊$\overline{CB}$入射，得到投影徑 c × sinB（即$\overline{CB}$邊上的高），接著將光束順時針旋轉至與$\overline{CA}$平行，得到投影徑 c × sinA（即$\overline{CA}$邊上的高）。此旋轉過程中，我們得到的投影徑總和以積分式表示為：c × $\int_B^{\pi-A} sin\theta d\theta$。同理，光線由平行$\overline{BA}$順時針旋轉至平行$\overline{BC}$，投影徑總和為 b × $\int_A^{\pi-C} sin\theta d\theta$；光線由平行$\overline{AC}$順時針旋轉至平行$\overline{AB}$，投影徑總和為 a × $\int_C^{\pi-B} sin\theta d\theta$。[3]

頂點的旋轉會等價於其對邊的旋轉，例如：A 點的旋轉會等價於$\underline{BC}$邊的旋轉。故當光線完整繞完一圈時，投影徑之總和為：

$$2\left(c \times \int_B^{\pi-A} sin\theta d\theta + b \times \int_A^{\pi-C} sin\theta d\theta + a \times \int_C^{\pi-B} sin\theta d\theta\right)$$

$$= 2\{ c[\cos B - \cos(\pi - A)] + b[\cos A - \cos(\pi - C)] + a \times [\cos C - \cos(\pi - B)] \}$$

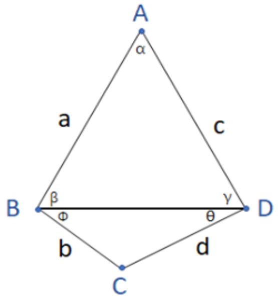
$$= 2\{ c \times \cos B + c \times \cos A + b \times \cos A + b \times \cos C + a \times \cos C + a \times \cos B \}$$

又因投影定理，c × cosB + b × cosC = a，依此類推，原式 = 2(a + b + c)，故得平均投影徑 $\frac{2(a+b+c)}{2\pi} = \frac{S}{\pi}$，其中 S 為三角形之周長。

因此三角形在的接觸機率為：$\frac{平均投影徑}{間距} = \frac{S}{\pi D}$。

2、證明凸四邊形情況

欲證明凸四邊形，我們可以將其視為兩個三角形的結合（如圖四）。



圖四、凸四邊形示意圖（資料來源：研究者繪）

投影徑長：光線以逆時針由$\overline{AB}$轉至$\overline{AD}$：$2\overline{BD}\int_{\beta}^{\pi-\gamma} sin\theta d\theta$

由$\overline{DA}$轉至$\overline{DB}$：$2\overline{AB}\int_{\alpha}^{\pi-\beta} sin\theta d\theta + 2\overline{BC}\int_{0}^{\Phi} sin\theta d\theta$

由$\overline{BD}$轉至$\overline{BA}$：$2\overline{DA}\int_{\gamma}^{\pi-\alpha} sin\theta d\theta + 2\overline{DC}\int_{0}^{\theta} sin\theta d\theta$

$2\ \overline{BD}\ [\ \cos\beta - \cos(\pi-\gamma)\ ] + 2\ \overline{AB}\ [\ (\ \cos\alpha - \cos(\pi-\beta)\ ]$

$+ 2\ \overline{DA}\ [\ \cos\gamma - \cos(\pi-\alpha)\ ] + 2\ \overline{BC}\ [\ \cos 0^{\circ} - \cos\Phi] + 2\ \overline{DC}\ [\ \cos 0^{\circ} - \cos\theta\ ]$

$= 2\ \overline{BD}\ [\ \cos\beta + \cos\gamma\ ] + 2\ \overline{AB}\ [\ (\ \cos\alpha + \cos\beta\ ] + 2\ \overline{DA}\ [\ \cos\gamma + \cos\alpha\ ]$

$+ 2\ \overline{BC}\ (1 - \cos\Phi) + 2\ \overline{DC}\ (1 - \cos\theta)$

$\because \overline{BD} = \overline{AB}\cos\beta + \overline{DA}\cos\gamma$

$\therefore$原式 $= 2\ (\overline{BD} + \overline{AB} + \overline{DA}) + 2\ (\overline{BC} + \overline{DC} - \overline{BC}\cos\Phi - \overline{DC}\cos\theta)$

$\because \overline{BD} = \overline{BC}\cos\Phi + \overline{DC}\cos\theta$

$\therefore$原式 $= 2\ (\ \overline{BD} + \overline{AB} + \overline{DA} + \overline{BC} + \overline{DC} - \overline{BD})$

$= 2\ (\ \overline{AB} + \overline{DA} + \overline{BC} + \overline{DC}) = 2S$

$\therefore$凸四邊形的平均投影徑為：$\frac{2S}{2\pi} = \frac{S}{\pi}$。

二、紙片與平行平面的接觸機率實驗與計算

於特定空間中投擲紙片（視為不具厚度的生物），進行實體模擬：立起畫有若干條平行線的透明板，由上方隨機撒下紙片，使用手機將紙片落下的過程慢動作錄影，再實驗計算其接觸平面的機率。

圖五、裝置側視圖

圖六、裝置俯視圖

在透明板上的平行線，可視為無限延長的平面，以透明板中線為基準，當紙片落至中線時，有通過平行線則表示會接觸平面。

選擇的針形：正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形以及圓形。

選擇的平行線間隔：５公分、７公分。

計算針（紙片）接觸平面的機率方法：

（一）觀看錄製的影片計算總樣本數與接觸數量。

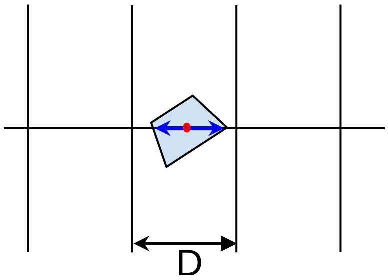
（二）修正系統誤差。

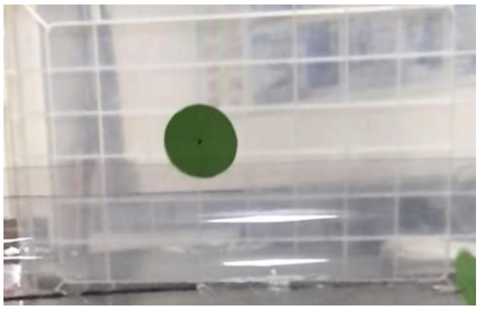
由於撒下紙片的位置不同，手機拍攝時，紙片投影面積會因距離變大而縮小，根據每個實驗中紙片與手機的平均距離、透明隔板與手機的距離，將紙片與平面接觸的機率依照不同倍率調整後加權平均。以上圖(圖六)為例：透明隔板與紙片落點距離約為半個桌面，而手機架在離透明板一個桌面的前方，故須將實驗所得機率，同乘以 1.5 才是實際值。

表二、實際模擬投針結果紀錄（資料來源：研究者製）

針形	樣本數	接觸數量	修正後與平面接觸的機率	平行間距
正三角形	569	293	0.7724	5 公分
正方形	593	311	0.5860	5 公分
正五邊形	542	208	0.5756	5 公分
正六邊形	694	316	0.6830	5 公分
圓形	572	221	0.5795	5 公分
正三角形	546	204	0.5604	7 公分
圓形	534	186	0.5225	7 公分

選取樣本時，研究者判定圖形是否與直線相交乃由圖形中點過中線時(側視)，是否有和相距為 D 的平面相交。因此，令重心過中線的圖形長為變動數 m ，當圖形以任一角度翻轉時，投影在側面上的長度為 k ，則所有角度時 k 的平均與 D 之比值，為相交機率。





圖七、重心過中線的圖形投影長示意圖　　　　圖八、實驗結果判別

圖形為圓形時， m 恰為直徑 2R ，可得 $k=\frac{2R}{\pi}$ 則 $p=\frac{k}{D}=\frac{2R}{\pi D}=\frac{2\times2}{7\pi} \vee \frac{2\times2}{5\pi}=$ 0.1818 ∨ 0.2546，與表三的實驗結果誤差分別為 65% 與 56% 。

理論值算出來的數值較小，實驗時觀察到圖形為圓形時，幾乎不出現翻轉，並不符合假設的「每個翻轉角度出現機率相同」，故實驗求得的機率較大。

圖形為正三角形(邊長為$\sqrt{3}$)時，m 為(利用座標化求得)：$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3cos\theta+\sqrt{3}sin\theta}{2cos\theta(cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)}d\theta$ $=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sqrt{3}sin(\theta+60)}{2sin(2\theta+30)+1}d\theta \approx 2\sqrt{3}\times 0.3802$，故 k 之平均值為:$\frac{2\sqrt{3}\times0.3802}{\frac{\pi}{3}} \approx 1.2575$，本次實驗所用紙片之面積皆為 4π，故正三角形邊長: 5.387，得 k=1.2575×$\frac{5.387}{\sqrt{3}}$= 3.911，又 $p=\frac{k}{D}=\frac{3.991}{5} \vee \frac{3.991}{7}$ = 0.7822∨0.5587 與表三實驗結果誤差分別為 1.27% 與 0.30%。

依據上述方法，可依序求出其他圖形接觸機率。

五、結論與生活應用

1. 當平行間距為 n 時，可將針折成不同圖形，與平行線的接觸機率為周長平均投影徑平行間距。
2. 維度增加後，經實驗與理論計算，可利用過重心之線段平均長度，與平行間距求得接觸機率，應用於實際蜘蛛網捕捉獵物的計算。
3. 若欲使用網類捕捉任何生物，皆可使用以上方法計算獵捕到的機率，近來由於捕捉過多仍 未發育成熟的魚類導致海洋資源耗竭，亦可從管制網類的空隙大小著手控管可捕捉到的魚 類大小。
4. 利用紅外線防盜系統時，也可簡單控制雷射光間距長短，避免非人為因素造成干擾。

參考資料

1.Boris V.Gnedenko.T(1950 年)Theory of Probability.(Soviet Union)

2.George Reese.University of Illinoi(MSTE)Buffon's Needle(1996 年). Retrieved from
https://mste.illinois.edu/activity/buffon/ (2020 年 6 月 24 日)

3.Wikipedia. (2020 年 5 月 12 日). Buffon's needle problem. Retrieved from
https://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s_needle_problem (2020 年 6 月 24 日)

4.許庭瑋、許致瑋、涂耿綸。投影與布豐投針的探究。第 60 屆國立暨縣(市)公私立高級中等學校第四分區科學展覽會。