

2022 年【全國科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中 (職) 組 成果報告表單

題目名稱：投石器的射擊距離探討

一、摘要：

古代的投石器包含了一個中央槓桿，一個位在發射臂上端的子彈托盤，一個位在發射臂底端的施力系統，這項成就也成為探索槓桿原理的性質的工具之一。

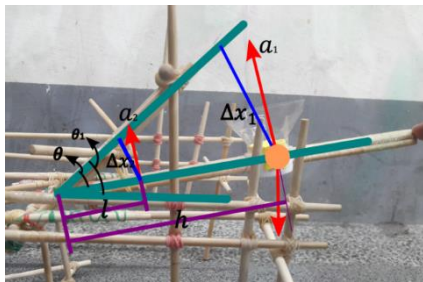
本實驗透過操作投石器的發射，紀錄數據及建模，以探討射擊距離與投石器架構關係。

二、探究題目與動機

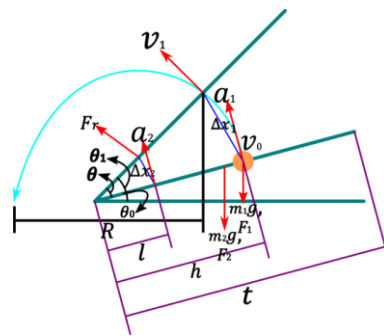
投石器競賽在科學競賽中很常見，而我們曾經想：如果有一個公式，可以推導出投石器結構與射擊距離的關係。自從對斜向拋射、虎克定律、槓桿原理等有更深入的認識後，較有能力可以解決這個有點複雜的問題了。

希望藉由本次實驗設計，可以讓操作投石器實驗，以及設計拋射裝置的獨立創作者，得以估算投石器架構與射擊距離的關係。

三、探究目的與假設



圖一



圖二

如圖一與圖二，我們可以簡化投石器的分力並將其可視化， θ 角變量， θ_1 發射角， θ_0 終止角， v_0 初始速度， v_1 子彈發射速度， a_1 發射臂托盤端加速度， a_2 發射臂橡皮筋端加速度， Δx_1 球發射前位移， Δx_2 橡皮筋型變位移， Δx_c 橡皮筋型變量， l 橡皮筋距平台高度， h 托盤距平台高度， t 發射臂總長， n 橡皮筋數量， m_1 球的質量， m_2 發射臂質量， F 合力， F_1 球受重力， F_2 發射臂受重力， F_r 橡皮筋施力， w 橡皮筋寬度， g 重力加速度， R 發射距離。

一、投石器所遵守的物理性質如下：

(一) 發射距離遵守斜向拋射公式 $R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ 。

(二) 子彈加速區遵守直線運動公式 $v_1^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

(三) 牛頓第二物理定律 $F = ma$

(四) 發射臂遵守槓桿原理 $F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$

二、我們認為發射角、角變量、托盤高度、橡皮筋數量、橡皮筋高度、托盤型號以及子彈質量皆能影響投石器距離。

- (一) 發射角：對垂直面 45 度時為最大值。
- (二) 角變量：角變量越大，發射距離越長。
- (三) 托盤高度：托盤高度越高，發射距離越長。
- (四) 橡皮筋數量：橡皮筋數量越多，發射距離越長。
- (五) 橡皮筋高度：橡皮筋高度越高，發射距離越長。
- (六) 托盤型號：托盤半徑越小，擴散度越小。
- (七) 子彈質量：子彈質量越重，發射距離越短。

三、實驗步驟如下：

- (一) 製作實驗用投石器。
 - (二) 改變不同參數，射擊並紀錄發射距離。
 - (三) 建立物理模型，模擬發射距離。
- 交叉比對模擬結果與實測結果並做進行校正。

四、探究方法與驗證步驟

一、製作實驗用投石器

在大量蒐集網路上各式投石器結構的前提下，我們選擇了可調整的參數為發射角、角變量、托盤高度、橡皮筋數量、橡皮筋高度、托盤型號。

將竹筷和橡皮筋固定後，我們產出了投石器的樣本：



原型機 1 號



原型機 2 號



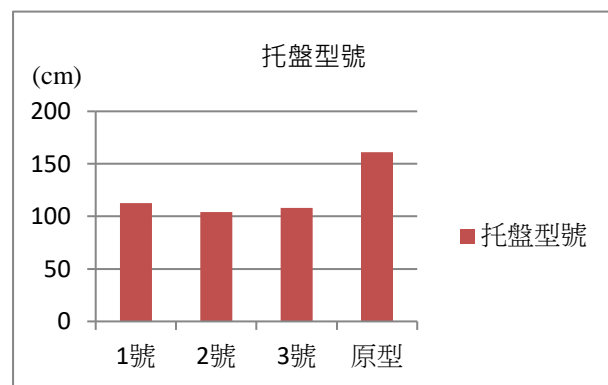
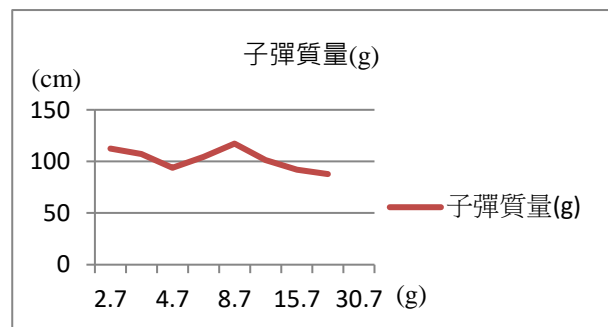
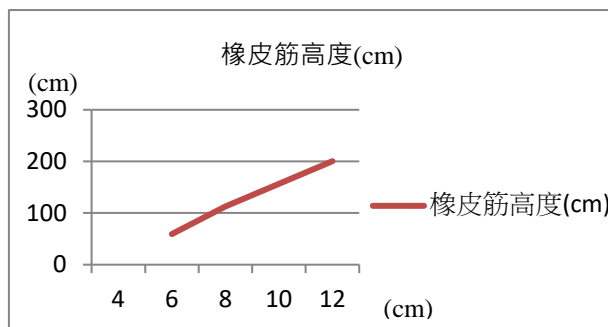
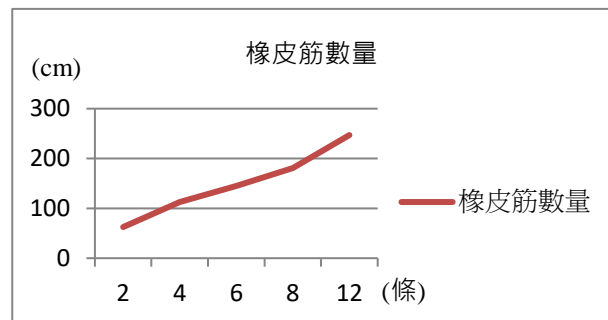
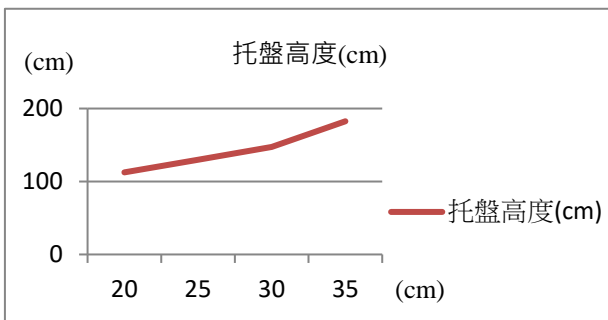
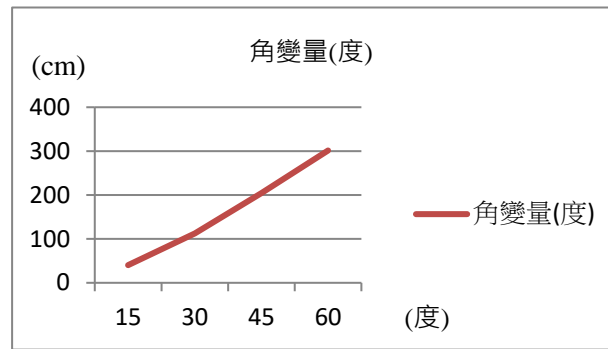
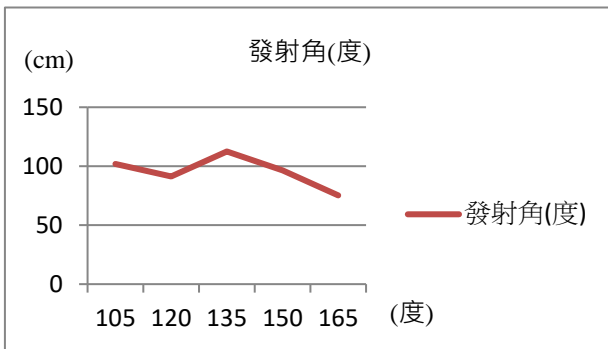
實驗機 1 號

只要把子彈放在托盤處（大型透明器皿區），壓下發射臂，放開手後子彈就會因為橡皮筋的關係順勢彈出。我們首先創造出了原型機一號，在這個時候我們已經達到可以微幅調整發射角、控制發射臂長、改變橡皮筋數量及穩定彈道了。而到了原型機 2 號我們甚至能改變橡皮筋高度、改變發射角及置入底座了。

然而這些投石器皆不夠穩定，而且會遇到像底座崩潰（原型機 1 號）、發射臂歪斜、角度不足（原型機 1 號）、橡皮筋偏移等，於是我們根據在原型機上得到的問題做了新的設計，才產生了夠穩定且可進入實驗階段的載具。

二、改變不同參數，射擊並紀錄發射距離

以下為用實驗機 1 號實測的數據



(註：由於原型托盤設計不良，導致控制變因遭到改變，因此數值大幅提高)

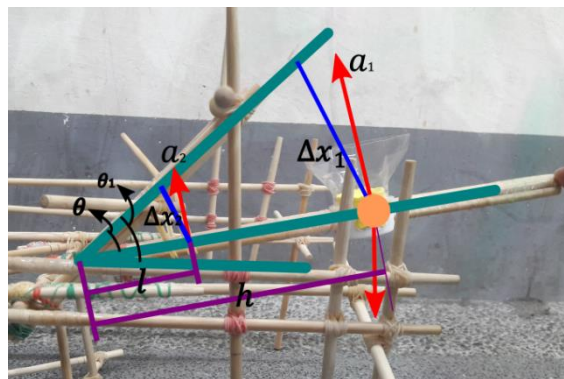
在這裡給出一些命名：

- (一) 發射角：子彈被投射出去時，發射臂與底盤所夾的夾角。
- (二) 角變量：發射臂經操作者拉到所設的操作角時，發射臂所經過的角度變化

- (三) 托盤高度：子彈托盤與底盤之間的最短距離
 - (四) 橡皮筋數量：橡皮筋掛勾上吊掛的橡皮筋數量
 - (五) 橡皮筋高度：橡皮筋掛勾與底盤之間的最短距離
 - (六) 托盤型號：1 號為八面套模托盤，2 號為圓形不透光托盤，3 號為半透明托盤，原型為原型機托盤
 - (七) 子彈質量：在這裡指的是乒乓球與鐵絲的質量總和
- 透過上述的數據，我們亦可觀察到下列現象：
- (一) 發射角：射擊距離在發射角達 135 度時約為最大值。
 - (二) 角變量：角變量越大，射擊距離越長。
 - (三) 托盤高度：托盤高度越大，射擊距離越長。
 - (四) 橡皮筋數量：橡皮筋數量越多，射擊距離越長。
 - (五) 橡皮筋高度：橡皮筋高度越高，射擊距離越長。
 - (六) 子彈質量：子彈質量越大，射擊距離越短。
 - (七) 托盤型號：不同種類的托盤並不會影響射擊結果

三、建立物理模型，模擬發射距離

先以下圖解釋投石器的各部份分別對應到哪些參數。



接下來的說明中，各個不同的位移，加速度資訊都將以此原則定義。

有三條綠色的直線，由上到下分別為角度限制器、發射臂以及平台的水平面，其餘的參數亦可由此圖推導。為了能夠正確的推算其他參數，我們透過建模以正確推算的投石器在各種參數下可能的發射距離，以及其他可能的投石器的發射距離。要達成這個目的，我們得從其背後的原理開始。

接下來是推導過程：

$$\text{經由拋射運動推導斜向拋射公式 } R = \frac{v_1^2 \sin 2\theta_1}{g} \quad (\text{式 1})$$

$$\text{發射速度推導 } v_1^2 = v_0^2 + 2a_1 \Delta x_1 = 2a_1 \Delta x_1 \cdot \text{即 } R = \frac{2a_1 \Delta x_1 \sin 2\theta_1}{g} \quad (\text{式 2})$$

$$\text{球位移推導 } \Delta x_1 = 2h\pi \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \cdot \text{即 } R = \frac{a_1 h \pi \theta \sin 2\theta_1}{90^\circ g} \quad (\text{式 3})$$

$$\text{球端加速度推導 } a_1 = \frac{h}{l} a_2 \cdot \text{即 } R = \frac{h}{l} \frac{a_2 h \pi \theta \sin 2\theta_1}{90^\circ g} \quad (\text{式 4})$$

$$\text{橡皮筋系統合力推導 } F = \frac{l}{h} a_1 (m_1 + m_2) \quad (\text{式 5})$$

橡皮筋拉力推導 1 : $F_r = \frac{l}{h} a_1 (m_1 + m_2) + \frac{g(2m_1 h - m_2 t)}{2l}$, $a_1 = \frac{h[F_r - \frac{g(2m_1 h - m_2 t)}{2l}]}{l(m_1 + m_2)}$ (式 6)

橡皮筋型變推導 $\Delta x_c = 2\sqrt{w^2 + 8l^2(1 - \cos \theta)} - 2w$ (式 7)

橡皮筋拉力推導 2 : $F_r = 2kn\sqrt{w^2 + 8l^2(1 - \cos \theta)} - 2wkn$ (式 8)

合併式 3、式 6 與式 8，得投石器的拋射距離推導為

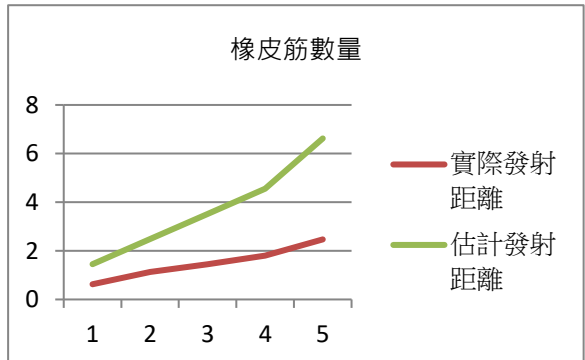
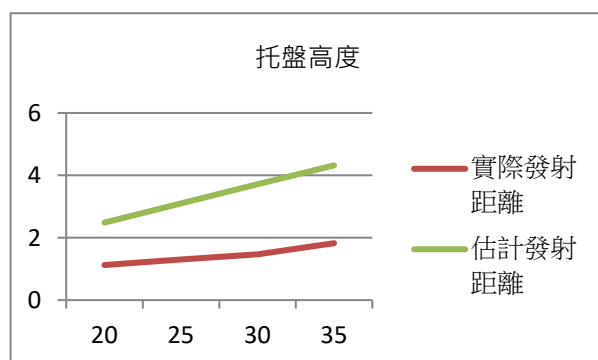
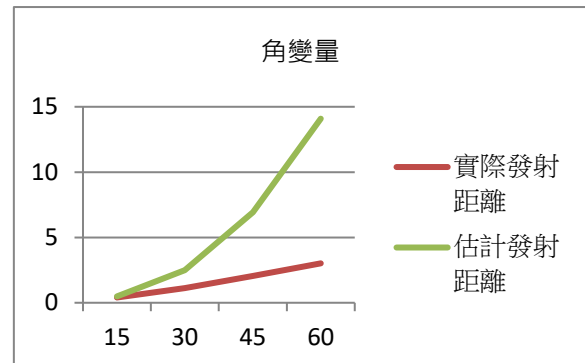
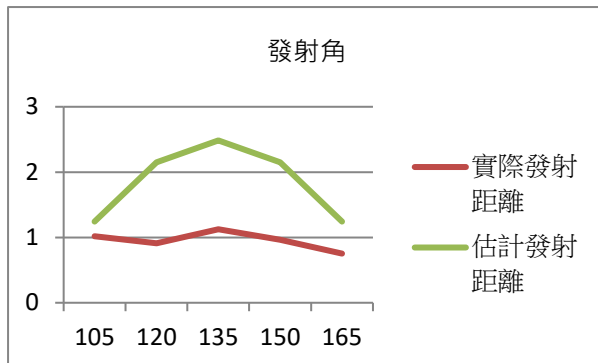
$$R = \frac{h}{l(m_1 + m_2)} [2kn\sqrt{w^2 + 8l^2(1 - \cos \theta)} - 2wkn - \frac{g}{2l}(2m_1 h - m_2 t)] \frac{h\pi\theta \sin 2\theta_1}{90^\circ g}$$

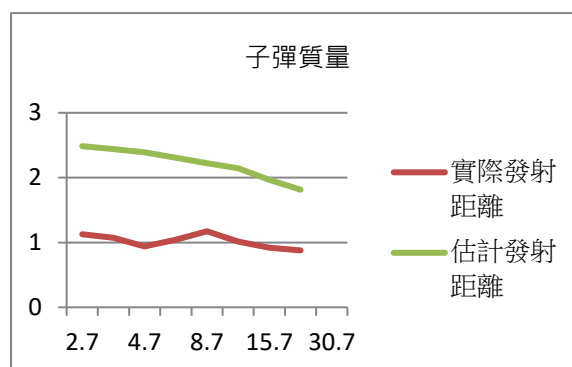
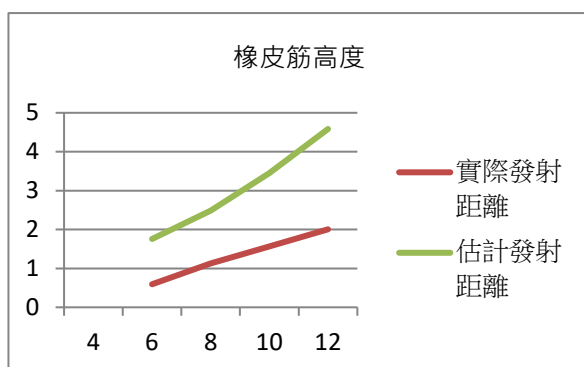
在這個模型中，我們假設以下條件：

- (一) 發射器具有抗力臂、施力臂與支點，且施力臂為橡皮筋端，抗力臂為子彈端，支點為發射臂擺動處與發射器平台的連接處。
- (二) 發射器的能量只集中在球身上而不分散給機具等，且發射器為穩固的。
- (三) 忽略空氣阻力對子彈路線及系統整體的影響。
- (四) 忽略發射臂拉動時與平台的摩擦力。
- (五) 橡皮筋型變施力遵守虎克定律。

四、交叉比對模擬結果與實測結果並做進行校正

透過圖表的展示可以更清楚模型中理想與實際的差距。我們將上述 6 大實驗的數據共同以模型與實際數據製成圖表。(註:托盤型號不在這次的討論範圍內)





從本模型得到的圖形與研究結果是一致的，只是數值差異較大。因此從這個模型可以推估各種參數組合的趨勢方向但不足以獨立預測射擊距離。

五、結論與生活應用

從此實驗，可以得到以下結論：

- 一、橡皮筋在達到一定受力後即不再遵守虎克定律。
- 二、載具參數的改變(發射角、托盤高度等)，對不確定度的影響遠大於距離的影響。
- 三、射擊距離在發射角達 135 度時達到最大值。
- 四、橡皮筋數量越多、高度越高、角變量越大、托盤高度越大，射擊距離越長。
- 五、子彈托盤的尺寸不會大幅改變發射距離。
- 六、子彈質量越大，射擊距離越短。
- 七、拋射距離可以此式子表示：

$$R = \frac{h}{l(m_1 + m_2)} \left[2kn\sqrt{w^2 + 8l^2(1 - \cos\theta)} - 2wkn - \frac{g}{2l}(2m_1h - m_2t) \right] \frac{h\pi\theta \sin 2\theta_1}{90^\circ g}$$

這個模型無法精準預測射擊距離，有幾個方式可以把射擊距離最大化：

- (一) 提高發射臂的角度變化，但不超過 90 度。
- (二) 把發射角調整到相對垂直面 45 度。
- (三) 提高托盤高度和橡皮筋的高度。
- (四) 增加橡皮筋的數量。(寬度不影響，除非夠寬)
- (五) 降低球的重量。

然而估計射擊距離還是有可能的，只要以實際操作的距離為基礎，配合模型的一部分的話，就可以估計發射距離了。

參考資料

1. 維基百科。投石器。2021 年 12 月 6 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%8A%95%E7%9F%B3%E6%A9%9F>
2. 羅渣。2020 年 9 月 9 日。投石機大作戰，取自 https://www.hkedcity.net/funpost/science_ahead/page_5f57062f90344327223c9869
3. 蔡鼎翔、顏浩哲、羅擘。2019 年 3 月 29 日。橡皮筋與彈力係數的關係。取自 <https://www.shs.edu.tw/works/essay/2019/03/2019032916580720.pdf>