2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

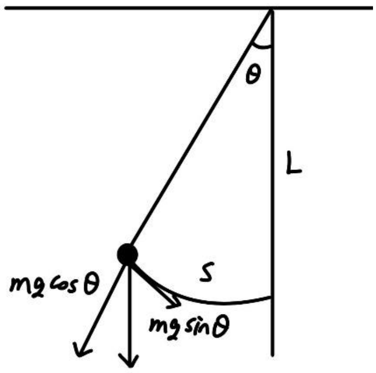
題目名稱： 領域展開！—泰勒展開式在物理學上的應用
一、摘要
本研究參考數理相關的教科書及文獻，了解泰勒展開式的作法與其所代表的含意，並將其運用在物理學的相關領域當中，我們展開簡諧運動、雙星互繞、高斯分布等公式，再代入實際數據進行運算，進而延伸成為另一項實用的工具，我們也探討了泰勒展開式與單擺小角度近似的關聯，發現$\sin\theta$在θ趨近於 0 時的泰勒展開式會大約等於θ，單擺的關係式可視為簡諧運動的形式，進而求出週期等物理量，這也解釋了為何當初物理課在算單擺週期時有規定θ需小於$5°$。 根據上述內容，我們將結果整合，並歸納出結論及生活應用。
二、探究題目與動機
在選修數甲上的第三章中，提到泰勒展開式（Taylor series）能夠協助我們將一多項式函數化成 x-a 的冪級數形式，並估計在 a 附近的數值，有點類似綜合除法的應用，但在上網搜尋相關資料後，發現泰勒展開式的真正用途是將非多項式函數轉化成無限項的多項式函數，而這將協助我們在運動學、力學等領域，估算非多項式函數的結果。因此本研究將尋找生活中的相關例子，歸納泰勒展開過後的方程式及其所代表的意涵，並實際代入數據進行運算。
三、探究目的與假設
1. 了解泰勒展開式的作法。 2. 探討單擺小角度近似與泰勒展開式的關係。 3. 探討泰勒展開式在簡諧運動公式中的應用。 4. 探討泰勒展開式在高斯分布公式中的應用。
四、探究方法與驗證步驟
1. 選修數甲上的第三章提到，假定一方程式為： $$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$ 則我們可將此方程式轉換為： $$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n$$ 其中 $b_0 = f(a)$, $b_1 = f'(a)$, $b_2 = \frac{f''(a)}{2}$, $b_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$, …, $b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 整理得$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 在上述式子中，n!表示 n 的階層，而$f^{(n)}(a)$表示$f(x)$在點 a 處的 n 階微分，若 a=0，可以將此稱作馬克勞林級數。 這就是泰勒展開式的定義，我們通常會利用它來計算結果的近似值，要注意的是，此

式子只能用作估算 a 附近的點，當 x 偏離 a 越多，其誤差值就會越大，且$f(x)$必須是一個可以被微分無數次的函數，如：絕對值函數($f(x)=|x|$)或取整函數($f(x)=[x]$)皆不能套用此定義。

2. 在物理學中，假設有一單擺不受外力影響，只藉由其自身重量擺動，當其偏離角度 $\theta \leqq 5°$，其週期符合下列公式：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

其中 L 為擺長，g 為重力加速度。
當時在上物理課的我們很疑惑為何 θ 必須小於 5°，現在我們有能力分析其原因。



圖一 單擺示意圖
(作者自行繪製)

由圖一所示，我們假設質量為 m 的小球，繫在一長度為 L(質量不計)之細繩下，將小球拉至與鉛直面呈 θ 角時釋放，小球會因重力的影響來回擺盪，我們將重力分解成法向量 mg cos θ 與切向量 mg sin θ，發現只有切向量對其作用，因此回復力為：

$$F=-mgsin\theta$$

而加速度 a 可表示成位移 x 對時間 t 做兩次微分，其中位移 x 可表示成$S=L\theta$，因此

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由牛頓第二運動定律($F=ma$)可得知單擺之運動方程式

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgsin\theta$$

，整理得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{L}sin\theta$$

此方程式為二階非線性常微分方程 (second order nonlinear differential equation)，處理起來十分複雜，但當我們將$f(\theta)=sin\theta$ 做泰勒展開，考慮到

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \quad \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

，因此

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=\cos 0=1 \qquad f''(0)=-\sin 0=0 \qquad f'''(0)=-\cos 0=-1$$

以此類推，得

$$f(\theta)\{\theta\to 0\}\approx\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots$$

當 θ 趨近於 0°時，由於方程式後面幾項的數值太小可忽略不計，sinθ 就會約等於 θ，而上述方程式即可改為

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad 及 \quad F = -mg\theta = -\frac{mg}{L}L\theta = -\frac{mg}{L}x$$

對右式來說，這符合簡諧運動的關係式，因此我們可以計算其週期及其他物理量，對左式來說，我們成功將其簡化為二階線性常微分方程(second order linear differential equation)，這樣處理起來將容易許多，但礙於篇幅關係，在此不多做贅述。我們只需要知道，透過泰勒展開式，我們可以清楚發現當 θ 足夠小時，因 sin$\theta \approx \theta$，其運動軌跡會近似直線，可視為簡諧運動的形式，這便是單擺的小角度近似。

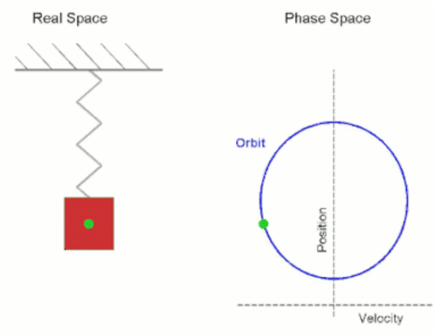
3. 在選物一中提到簡諧運動可視為圓周運動在平面上的投影，其公式為：

$X(t) = Rcos(\omega t)$

$V(t) = -R\omega sin(\omega t)$

$a(t) = -R\omega^2 cos(\omega t)$

其中 X(t)、V(t)、a(t)分別代表位移、速度及加速度，R 表振福、ω表角頻率。



圖二 簡諧運動示意圖
(維基百科)

若我們在$t = 0$附近進行泰勒展開，以 X(t)為例，根據連鎖律(Chain rule)：

$X(0) = Rcos(0) = R$

$X'(0) = V(0) = -R\omega sin(0) = 0$

$X''(0) = a(0) = -R\omega^2 cos(0) = -R\omega^2$

$X'''(0) = R\omega^3 sin(0) = 0$

，因此

$$X(t)\{t \to 0\} \approx R(1 - \frac{\omega^2}{2!}t^2 + \frac{\omega^4}{4!}t^4 - \frac{\omega^6}{6!}t^6 + \frac{\omega^8}{8!}t^8 - \cdots)$$

而我們也可將 V(t)及 a(t)在$t = 0$附近作泰勒展開，得到：

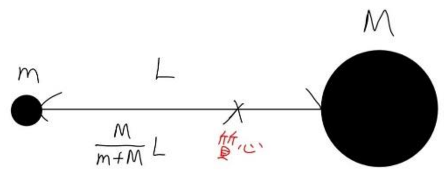
$$V(t)\{t \to 0\} \approx -R\omega^2(t - \frac{\omega^2}{3!}t^3 + \frac{\omega^4}{5!}t^5 - \frac{\omega^6}{7!}t^7 + \frac{\omega^8}{9!}t^9 - \cdots)$$

$$a(t)\{t \to 0\} \approx -R\omega^2(1 - \frac{\omega^2}{2!}t^2 + \frac{\omega^4}{4!}t^4 - \frac{\omega^6}{6!}t^6 + \frac{\omega^8}{8!}t^8 - \cdots)$$

有了這些方程式，我們即可在不清楚sin(ωt) 、$cos(\omega t)$的情況下估算近似值。讓我們將此結果運用在天文領域上。

雙星互繞是因彼此互相作用而產生的運動，如：地球及月亮、行星及恆星等的運動都算是一種雙星互繞，我們假設有兩個質量分別為 m 及 M 的星體(以下以 m 及 M 代稱)，兩者相距 L，以 m 進行分析，兩者的質心(barycenter)與其相距 M/(m+M)L，又因其運動軌跡可視作圓周運動，兩者之萬有引力

$$F = \frac{GmM}{L^2} = m \cdot \frac{M}{m+M} L \cdot \omega^2$$



圖三 質心位置示意圖
(作者自行繪製)

其中 G 為重力常數、ω為 m 之角速度。

我們可以將上述方程式整理為：

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m+M)}{L^3}}$$

對 m 來說，我們可以將其運動軌跡(圓周運動)水平投射在 X 平面上，即形成簡諧運動的型式，將其帶入泰勒展開過後的公式得：

$$X(t)\{t \to 0\} \approx \frac{M}{m+M} L\left(1 - \frac{\frac{G(m+M)}{L^3}}{2!} t^2 + \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^2}{4!} t^4 - \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^3}{6!} t^6 - \cdots\right)$$

$$V(t)\{t \to 0\} \approx -\frac{GM}{L^2}\left(t - \frac{\frac{G(m+M)}{L^3}}{3!} t^3 + \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^2}{5!} t^5 - \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^3}{7!} t^7 - \cdots\right)$$

$$a(t)\{t \to 0\} \approx -\frac{GM}{L^2}\left(1 - \frac{\frac{G(m+M)}{L^3}}{2!} t^2 + \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^2}{4!} t^4 - \frac{\left[\frac{G(m+M)}{L^3}\right]^3}{6!} t^6 - \cdots\right)$$

我們以冥王星(M)與冥衛一(m)為實際例子代入數據運算，並觀察其誤差值。

$M = 1.30 \times 10^{22}\ kg$

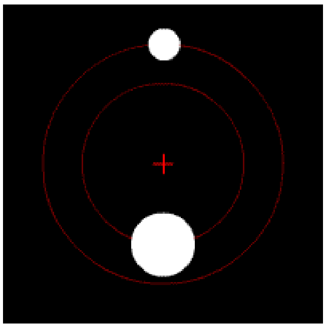
$m = 1.59 \times 10^{21}\ kg$

$L = 19570\ km$

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot \frac{m^2}{kg^2}$

$R = \frac{M}{m+M} L = 17437.28\ km$

$\omega^2 = 0.126322242$



圖四 雙星互繞示意圖
(維基百科)

設$t = 0.05$，其三階近似的結果為：

$$X(0.05) \approx 17437.28 \times (1 - 0.06316 \times 0.0025) = 17434.52665$$

$$V(0.05) \approx -2264.05793 \times (0.05 - 0.06316 \times 1.25 \times 10^{-4}) = -113.18502$$

$$a(0.05) \approx -2264.05793 \times (1 - 0.06316 \times 0.0025) = -2263.70044$$

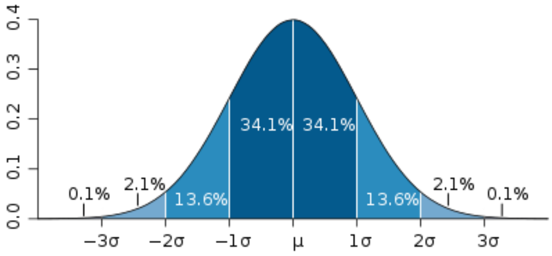
4. 最後，我們將舉一個較為複雜的例子：高斯分布。

高斯分布(Gaussian distribution)，又稱常態分布，是一個連續機率分布的模型，其函數曲線呈鐘形，因此又被稱作鐘形曲線(bell-shaped curve)，我們可以在許多地方看到高斯分布的影子，從生物學上的多基因遺傳，到物理學中的光子計數，結果都被發現符合高斯分布的函數圖形，因此其重要性不言而喻。

高斯分布的機率密度函數為：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中σ為標準差、μ為平均值。



圖五 高斯分布的函數圖形

(國立台灣大學網頁)

若我們在 x=μ附近進行泰勒展開，並求其二階近似的函數，考慮到連鎖律(Chain rule)及

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$f'(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot-\frac{2(\mu-\mu)}{2\sigma^2}e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0$$

在計算$f(x)$的二階導數時，我們還需要考慮到乘積法則(Product rule)：

$$(hg)'=h'g+g'h$$

因此，

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot-\frac{2}{2\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot[-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}]^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f''(\mu)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{\sigma^2}$$

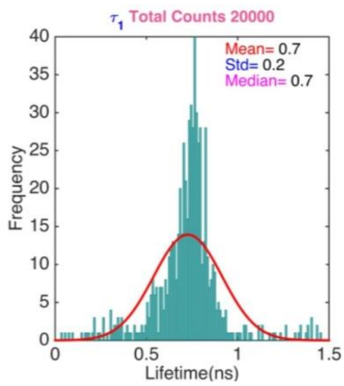
整理得

$$f(x)\{x\to\mu\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot[1-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2]$$

原本看似極其複雜的函數被簡化成一條多項式，讓我們能夠輕易地算出近似值。

Kalyan Santra 等曾於 2017 年發表一篇關於光子計數的相關論文，他們利用時間分辨光譜學(Time-resolved spectroscopy)，分析羅丹明 B (Rhodamine B)與酸性紅 94 (Rose Bengal)螢光衰減的時間長短，而其實驗數據恰好符合高斯分布的形式(請見圖六)，我們以其中一組數據作為例子，推估平均值附近的機率密度。

其中總樣本數為 20000，平均數及中位數為 0.7(ns)，而標準差為 0.2。



圖六 螢光衰減頻率直方圖

(論文內附圖)

若我們想得知 0.75(ns)時的機率密度為何，根據先前公式可得：

$$f(x)\{x\to\mu\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\left[1-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]=\frac{1}{2.5066*0.2}(1-12.5*0.0025)\approx 1.93239$$

又因為$f(\mu)\approx 1.99473$，根據梯形面積公式，我們可以估算出自 0.7ns 至 0.75ns 區間中的機率為$(1.99473+1.93239)*0.05*0.5\approx 0.09818=9.818\%$。

五、結論與生活應用

泰勒展開式是一個強大的工具，用於將複雜函數近似為簡單的多項式，進而方便地計算。在此報告中，我們以物理學為例，利用泰勒展開式成功展開了簡諧運動、雙星互繞以及高斯分佈等公式，並在展開$f(x)=\sin\theta$後，發現在θ趨近於 0 時，單擺的關係式可視為簡諧運動的形式，解釋了為何當初物理課在算單擺週期時有規定θ需小於$5°$。

這些結果可以用來理解和描述特定現象的成因，並且在解決實際問題時具有應用價值，舉例而言，我們將單擺的運動方程簡化為二階線性常微分方程，這可以作為工程設計和實驗研究的重要參考，如：阻尼器的設計等，而在高斯分布的例子中，它能幫我們更準確地分析和預測各種隨機變量的行為，從而在物理學、統計學、金融物理學等領域中得到了廣泛應用，像是布朗運動(Brownian motion)、誤差分布、馬克士威-波茲曼分布(Maxwell–Boltzmann distribution)、布萊克-休斯模型(Black-Scholes Model)等皆在某種程度上符合高斯分布的形式。

參考資料

- 許志農(主編)。選修數甲上。龍騰文化。
- 林秀豪(主編)。選修物理I(全)力學一。龍騰文化。
- 翁秉仁(2015)。微積分乙(修訂版)。台大出版中心。
- 于振華。機率與統計。
  http://www.math.ncu.edu.tw/≈yu/ps94/boards/lec27_ps_94.pdf。
- 龔柏任(2008)。單擺運動之函數理論。國立交通大學應用數學系所：碩士論文。
  https://reurl.cc/RWZ5D6。
- Santra K, Smith EA, Petrich JW, Song X(2017). Photon Counting Data Analysis: Application of the Maximum Likelihood and Related Methods for the Determination of Lifetimes in Mixtures of Rose Bengal and Rhodamine B. J Phys Chem A. 2017 Jan 12;121(1):122-132. doi: 10.1021/acs.jpca.6b10728. Epub 2016 Dec 22. PMID: 27936713.
  https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27936713/
- 林琦焜(2003)。單擺運動。數學傳播期刊，27，32-43。
  https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d272/27205.pdf。
- 國立高雄科技大學網頁，連續性機率分布。
  https://reurl.cc/zld3xp。