

2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：探討單人與情侶安心入座的組數極值

一、摘要

本研究從生活中的觀察出發，探討單人與情侶安心入座的組數極值。研究變因有三：人數（單人或情侶）、維度（一維或二維）、極值（最大與最小）。我們使用平移法窮舉出所有密鋪模式的可能性，並計算各種模式下的「平均控制範圍」，藉此推得 $2*2*2=8$ 個不同的通解，以及最佳的密鋪型態。本研究的結果可有效用於防疫座位、博愛座等規畫，使空間利用達到最經濟的狀態。

二、探究題目與動機

題目：探討單人與情侶安心入座的組數極值

動機：我們觀察到，當男生去上廁所時，不喜歡上兩側都有人使用的小便斗。只有一側有人時，通常會「勉強」去上。當兩側都沒人時，才可以「安心」解放。因此我們好奇最少幾人同時安心上廁所，可使廁所內剩餘的小便斗都無法使用？

三、探究目的與假設

- 一、探討一維橫列 a 個座位中，安心入座的人數的最大值與最小值。
- 二、探討二維 $a \times b$ 棋盤座位中，安心入座的人數的最大值與最小值。
- 三、探討一維橫列 a 個座位中，安心入座的情侶組數的最大值與最小值。
- 四、探討二維 $a \times b$ 棋盤座位中，安心入座的情侶組數的最大值與最小值。

四、探究方法與驗證步驟

一、研究流程

(一) 利用棋盤模擬與嘗試。

(二) 利用「上下平移」、「左右平移」、「交錯」的方式，窮舉單雙人入座的圖形，並算出平均控制範圍。

(三) 比較各密鋪圖形的控制範圍，推導最佳解，並以 Excel 製圖。

二、名詞定義

1. 一維橫列 a 個座位：如圖為 4 個座位。



(圖一)：4 個座位

2. 二維 $a \times b$ 棋盤座位：如圖為 4×3 棋盤。



(圖二)： 4×3 棋盤

3. 鄰格：與某個格子相鄰的格子，一維中有左右 2 格、二維中有前後左右 4 格、三維中有上

下前後左右 6 格。

4. 安心入座原則：每個人 (每組情侶) 的所有鄰格都沒有其他人入座。

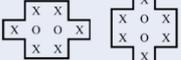
5. 函數 $f_{\max}(a)$ ：在安心入座原則下，單人入座一維 a 格棋盤的人數最大值。

6. 函數 $f_{\min}(a)$ ：在安心入座原則下，單人入座一維 a 格棋盤的人數最小值。

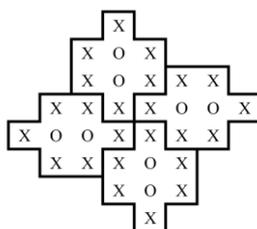
7. 函數 $f_{\max}(a, b)$ ：在安心入座原則下，單人入座二維 $a \times b$ 棋盤的人數最大值。

8. 函數 $f_{\min}(a, b)$ ：在安心入座原則下，單人入座二維 $a \times b$ 棋盤的人數最小值。
9. 函數 $g_{\max}(a)$ ：在安心入座原則下，情侶入座一維 a 格棋盤的組數最大值。
10. 函數 $g_{\min}(a)$ ：在安心入座原則下，情侶入座一維 a 格棋盤的組數最小值。
11. 函數 $g_{\max}(a, b)$ ：在安心入座原則下，情侶入座二維 $a \times b$ 棋盤的組數最大值。
12. 函數 $g_{\min}(a, b)$ ：在安心入座原則下，情侶入座二維 $a \times b$ 棋盤的組數最小值。
13. 基本單位：在格狀區域內，單人與情侶占用座位的最單純情況，其中 O 代表人，X 代表禁用座位。

(表一)：單人及情侶在一二維的基本單位

<p>一維單人基本單位</p> 	<p>一維情侶基本單位</p> 
<p>二維單人基本單位</p> 	<p>二維情侶基本單位</p> 

14. 密鋪：將基本單位複製後，不留空隙地填滿特定區域的座位。其中基本單位的禁座區 (填 X 的格子) 有可能互相重疊。

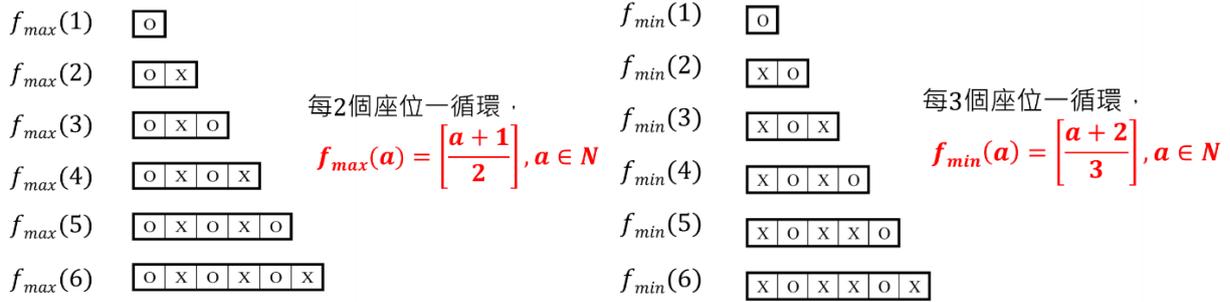


(圖三)：用二維情侶基本單位密鋪形成的圖形

15. 平均控制範圍：多個單人或多組情侶同時控制特定範圍時，每組的平均控制量。

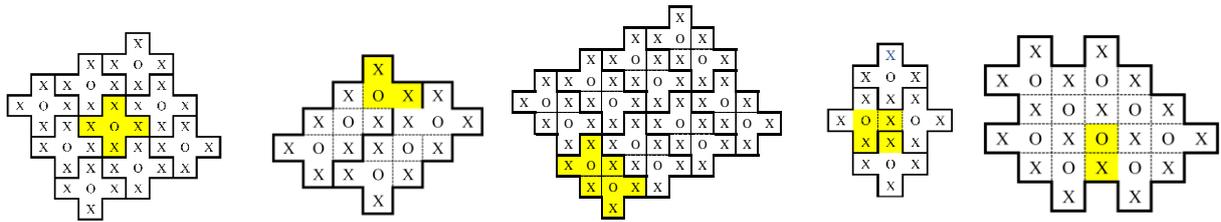
五、結論與生活應用

- 一、一維中，安心入座的人數的最大值、最小值。



(圖四)：單人入座一維空間的人數最大值及最小值

二、二維中，安心入座的人數的最大值與最小值。

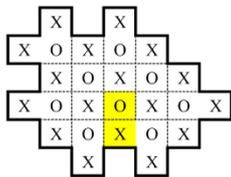


(圖六)：單人二維密鋪及平移的所有可能

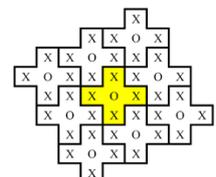
$$f_{min}(a, b) = \sum_{i=0}^4 \binom{a}{5} \left\lceil \frac{b + (3i) \bmod 5}{5} \right\rceil + e(a, b) - k, a, b \in \mathbb{N}$$

$$f_{max}(a, b) = \left\lceil \frac{ab + 1}{2} \right\rceil, a, b \in \mathbb{N}$$

其中 k 之值如下表，而 $e(a, b) = \sum_{i=0}^4 \left(\binom{a+i}{5} \left(\left\lceil \frac{b+(3i+1) \bmod 5}{5} \right\rceil - \left\lceil \frac{b-1+(3i+1) \bmod 5}{5} \right\rceil \right) + \binom{a+i}{5} \left(\left\lceil \frac{a+(2i+1) \bmod 5}{5} \right\rceil - \left\lceil \frac{a-1+(2i+1) \bmod 5}{5} \right\rceil \right) \right)$

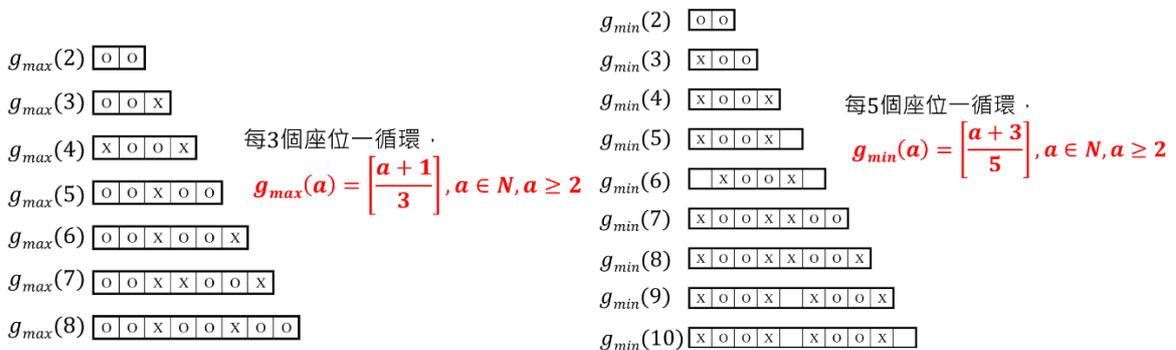


k	$a \equiv 0$	$a \equiv 1$	$a \equiv 2$	$a \equiv 3$	$a \equiv 4$
$b \equiv 0$	3	2	3	3	2
$b \equiv 1$	3	3	3	2	2
$b \equiv 2$	2	3	3	3	2
$b \equiv 3$	3	3	2	3	2
$b \equiv 4$	2	2	2	2	0



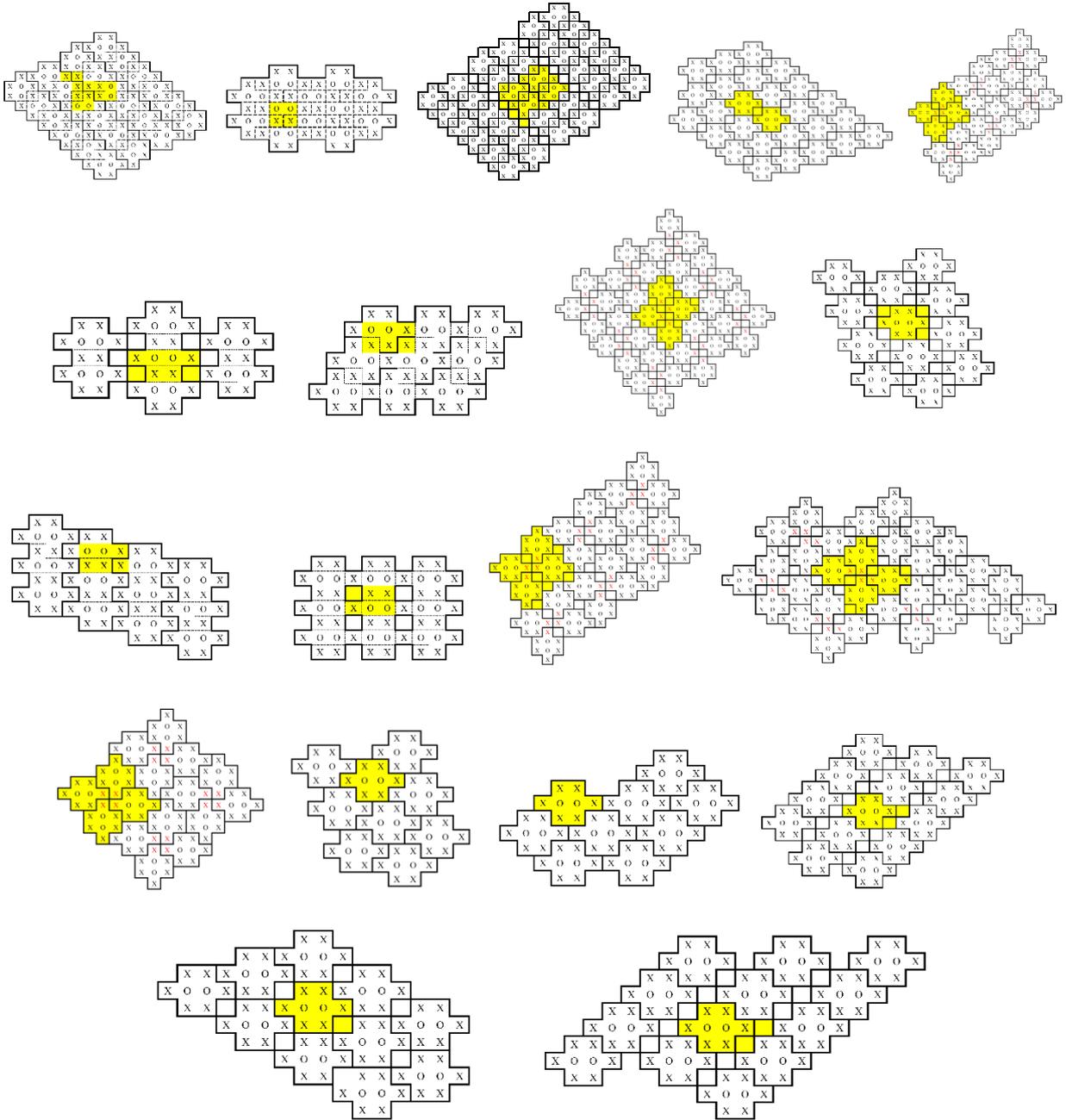
(圖七)：單人入座二維空間的人數最大值及最小值

三、一維中，安心入座的情侶組數的最大值與最小值。



(圖八)：情侶入座一維空間的人數最大值及最小值

四、二維中，安心入座的情侶組數的最大值與最小值。



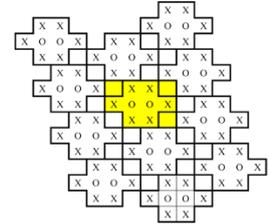
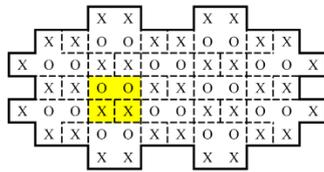
(圖九)：情侶二維密鋪及平移的所有可能 (反轉倒轉視為同種)

$$g_{max}(a, b) = \begin{cases} \lfloor \frac{a}{2} \rfloor \times \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - k, & \text{if } b \equiv 0 \pmod{2} \\ \lfloor \frac{a}{2} \rfloor \times \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - k, & \text{if } b \not\equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{N}, a, b \geq 2$$

其中 k 值表尚待製作。

$$g_{min}(a, b) = \lfloor \frac{ab}{11} \rfloor + e(a, b) - k, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

其中 $e(a, b)$ 待推導並簡化， k 值表共有 $11^3 = 1331$ 格，目前設法濃縮中。



(圖十)：情侶入座二維空間的人數最大值及最小值

五、結論

(表二)：單人及情侶在一二維的結論

人數	維度	最大值	最小值
單人	一維	2座位一循環	3座位一循環
	二維	直方形 平均控制2格	十字架 平均控制5格
情侶	一維	3座位一循環	5座位一循環
	二維	正方形 平均控制4格	缺角方A形 平均控制11格

六、生活應用

可以將研究結果應用到各種特殊座位配置中（如國際會議廳、梅花座、防疫隔離座、餐廳面牆座位、休息站小便斗配置等），使所有人都安心入座。

參考資料

1. Dangelo, J. P. & West, D. B. (2000). *Mathematical Thinking: Problem Solving and Proofs* (2nd ed.). Prentice Hall, NJ.
2. 黃皓晨 (2022)。控制格狀區域的最佳配置。臺北市第 55 屆科展數學科作品。
3. 曾迺強 (2018)。自由時報新聞：女生不知道！男生跳格使用小便斗的原因。取自 <https://news.ltn.com.tw/news/life/breakingnews/2302378>。