

2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

☒ 國中組 ☐ 普高組 ☐ 技高組 成果報告格式

題目名稱：換汽水對決！數學找出最強方案

一、摘要

本研究主要在解決臺灣科學教育館森棚教官的數學題的一道問題-換汽水，並往下進行一般化的推導，過程因計算繁雜，故另外尋求電腦程式的幫助，是資訊結合數學的研究過程及成果，主要研究結果為：

- ◆ 若原先給定的汽水瓶數為 $x(\geq 5)$ ，則可換到瓶數的最大上限為 $P + 1$ 瓶。(其中 P 為 $(2x - 8) \div 6$ 的商)
- ◆ 若原有 $x(\geq 5)$ 瓶，則保證至少可以換到的瓶數為 $M + 1$ 瓶。(其中 M 為 $(x - 5) \div 4$ 的商)
- ◆ 寫出能夠計算兌換瓶數的電腦程式。
- ◆ BBA 策略為能夠換到最多的瓶數的最佳策略。
- ◆ 原始瓶數對應到能夠兌換到的最多瓶數具有 442 規律。

二、探究題目與動機

有一天，當我們在上網搜尋研究題目時，看到了一道題目：「年假期間，小誼一家人與鄰居多人，浩浩蕩蕩組一個旅遊團到風景區玩耍，玩累了口渴，於是請小誼到商店買汽水。商店的門口寫著：「過年大優待！『七個瓶蓋加上三個空瓶』或『三個瓶蓋加上五個空瓶』都可以再換一瓶！」，小誼身上剛好帶了可以買十七瓶汽水的錢，請問這個旅遊團最多可以喝到幾瓶汽水呢？」（出處：國立臺灣科學教育館-森棚教官的數學題）

這道題目勾起了我們的好奇心，我們於是開始解題，期待不僅能找出這個問題的答案，更能做出不限於特定數字的一般化的推導，雖然我們才剛上七年級，所學非常有限，但還是期盼能應用讀到國中七年級以來的各種數學知識，並希望在研究過程中學習到各種新知及新技能。

三、探究目的與假設

1. 找出原始問題的解。
2. 找出給定任意數能夠換到的最多瓶數。
3. 將問題推廣至任意正整數的情況，找出最大可能的交換瓶數。
4. 找出最佳的兌換策略並證明。
5. 證明與解釋找出的規律。

四、探究方法與驗證步驟

名詞解釋

A 方案：七個瓶蓋加上三個空瓶換一瓶，以下以 A 表示。

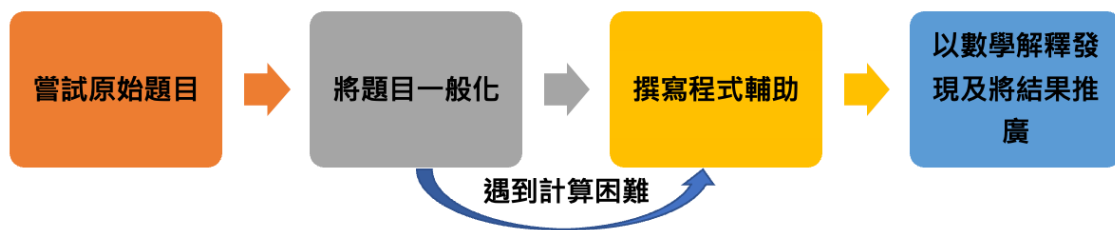
B 方案：三個瓶蓋加上五個空瓶換一瓶，以下以 B 表示。

瓶蓋：指原題目裡， A 、 B 方案的瓶蓋，以下以 C 表示。

空瓶：指原題目裡， A 、 B 方案的空瓶，以下以 D 表示。

也就是說，一瓶完整汽水共含 $1C+1D$ 。

研究流程



1. 找出原始問題的解（題目敘述請參考二、探究題目與動機）

$$17 \times 2 = 34 \text{ (瓶蓋及空瓶共 34 個物件)}$$

$$34 - 8 + 2 = 28 \text{ (其中減八因每次最少花 8 個物件，加二因每次返還 2 個物件)}$$

$$28 - 8 + 2 = 22$$

$$22 - 8 + 2 = 16$$

$$16 - 8 + 2 = 10$$

$$10 - 8 + 2 = 4$$

4 不夠再換一次

因此，最多只可能換 5 次（有可能連 5 次都不到）

我們原先想將 5 次的所有可能都列出來，但在過程中我們發現 4 次就已經是可換到的最多瓶數了，剩餘的物件無法再進行下一次的兌換，如下表（1）所示：

（表 1）

換法	可換到的瓶數	總瓶數	剩餘瓶蓋 C /空瓶 D
AAAA	2	19	5/13
AAAB	2	19	5/13
AABA	3	20	3/9
ABAA	3	20	3/9
BAAA	3	20	3/9
AABB	4	21	1/5
ABBA	4	21	1/5
BBAA	4	21	1/5

換法	可換到的瓶數	總瓶數	剩餘瓶蓋 C /空瓶 D
ABAB	4	21	1/5
BABA	4	21	1/5
BAAB	4	21	1/5
BBBA	4	21	5/3
BBAB	4	21	5/3
BABB	4	21	5/3
ABBB	4	21	5/3
BBBB	4	21	9/1

由上表可知，最多可交換次數為 4 次，最後可得 $21 = (17 + 4)$ 瓶汽水，此即為原始問題的解。

2. 找出給定任意數能夠換到的最大瓶數

◆ 定理 1：

若原先給定的汽水瓶數為 $x(\geq 5)$ ，則可換到瓶數的最大上限為 $P + 1$ 瓶。(不一定能達成，但必小於或等於此值)，其求法如下：

先計算： $(2x - 8) \div 6 = P \dots Q$ ，其中 P 、 Q 分別為商與餘數，

則 $P + 1$ 即為可換到瓶數的最大上限。(註： $x < 5$ 時，可換到瓶數顯然為 0)

證明：

一瓶汽水有一個瓶蓋 C 及一個空瓶 D ，故：

1 瓶汽水 $\rightarrow 1C + 1D$ ， x 瓶汽水 $\rightarrow xC + xD$ ，共有 $2x$ 個物件 (瓶蓋及空瓶總和)

B 方案需用到 3 個 C 、5 個 D ，共 $3 + 5 = 8$ 個物件， A 方案需用到 7 個 C 、3 個 D ，共 $7 + 3 = 10$ ，因此要算可兌換的最大可能用 B 方案即可。

因每次兌換，每換 8 個物件後，得 2 個物件，會進行 $2x - 8 + 2 - 8 + 2 \dots 8 + 2$

故計算 $(2x - 8) \div 6 = P \dots Q$

可求得 $P + 1$ 為兌換上限 (因上式首次兌換先扣除了一次 8，故最後須加回第一次兌換。)

◆ 定理 2：

若原有 $x(\geq 5)$ 瓶，則保證至少可以換到的瓶數為 $M + 1$ 瓶。

其求法如下：

計算 $(x - 5) \div 4 = M \dots N$ ，其中 M 、 N 分別為商與餘數，

則 $M + 1$ 為保證至少可換到的瓶數。(註： $x < 5$ 時，可換到瓶數顯然為 0)

證明：

因為用 B 方案每次兌換會用到 5 個空瓶 D 、3 個瓶蓋 C ，只要空瓶數夠用，那麼瓶蓋數必夠用，因此用空瓶數來求至少能換到的值。

又因每次兌換，換 5 個得 1 個， $5 - 1 = 4$ ，會進行 (原來空瓶數) $- 5 + 1 - 5 + 1 \dots 5 + 1$

因此先將 $(x - 5)$ 為第一次後，會取回 1 個空瓶，再消耗 5...進行下去，往後每次會消耗 4 個，故計算 $(x - 5) \div 4 = M \dots N$ 。

最後將 $M + 1$ (加第一次兌換)，即為至少可以換到的瓶數。

當然我們用 A 方案也能求出一個保證至少可以換到的瓶數，但 A 方案需要用到 7 個瓶蓋，因此求出來的值必比定理 2 來得小，故在定理 2 中用 B 方案計算即可。

我們的最終目標是找出給定任意數後，求出最多能換到幾瓶汽水，而定理 1 與定理 2 所扮演的兩個角色分別是上限與下限，也就是說： $M + 1 \leq \text{最多能夠換到的汽水瓶數} \leq P + 1$ 。

然而，透過上述討論雖然可以將最多能換到幾瓶汽水的值限定在某個範圍內，但其缺點是當原始瓶數越多時，兩個定理包含的上下限值涵蓋的範圍也會變大，這不利於我們找出確切最多能換到的汽水瓶數。研究期間我們利用如同表（1）的方法嘗試了其他數字，發現每次都要全部列出太花費時間，因此我們決定求助於資訊老師協助我們利用電腦程式幫忙計算，在 ChatGPT 及老師的幫助下，我們用 Python 語言寫出了一個程式，協助我們進一步觀察，如表（2）所示，並在這期間提出了一個兌換策略，希望可以用程式驗證。

表（2）

原始瓶數	最多可換瓶數	共有幾瓶
1	0	1
2	0	2
3	0	3
4	0	4
5	1	6
6	1	7
7	1	8
8	1	9
9	2	11
10	2	12
11	3	14
12	3	15
13	3	16
14	3	17

原始瓶數	最多可換瓶數	共有幾瓶
15	4	19
16	4	20
17	4	21
18	4	22
19	5	24
20	5	25
21	6	27
22	6	28
23	6	29
24	6	30
25	7	32
26	7	33
27	7	34
28	7	35

原始瓶數	最多可換瓶數	共有幾瓶
29	8	37
30	8	38
31	9	40
32	9	41
33	9	42
34	9	43

部分程式碼截圖：

```
#方案一
def one(flag, cape, body, change):
    if cape-7 >= 0 and body-3 >= 0 and flag != 1:
        cape = cape-6
        body = body-2
        change = 1 + change
    else:
        flag = 1
    return flag, cape, body, change

#方案二
def two(flag, cape, body, change):
    if cape-3 >= 0 and body-5 >= 0 and flag != 1:
        cape = cape-2
        body = body-4
        change = 1 + change
    else:
        flag = 1
    return flag, cape, body, change
```

以下，我們將探討及回答探究目的 3、4、5

最佳兌換策略（其他策略能換到的瓶數不超過此策略）

我們認為若原始瓶數 ≥ 11 ，則用一次 A 方案，兩次 B 方案為最佳策略，也就是一直用 BBABBBAB...的兌換方式（中間可以截斷，也可以換順序如 ABBABB...，即每三次保持 A:B = 1:2）。（簡稱 BBA 策略）

想法：因為此方式每三次兌換瓶蓋和空瓶各需要 13 個，這樣換到最後瓶蓋和空瓶數量不會相差太多。我們將在後續的討論證明此策略為最佳策略。

◆ 定理 3，表（2）中的規律（442 規律）

我們發現表(2)中，原始瓶數從1開始，對應到最多可換瓶數每4個會多1，之後每4個會多1，再每2個會多1，又再按此規律進行下去。(簡稱442規律)

證明 BBA 策略為能夠換到最多的瓶數，並依此證明 442 規律 (我們為了方便說明，以 21-30 為例來解釋。)

我們預計使用反證法的概念進行說明，先用 BBA 策略兌換汽水，再證明沒有其他方法能比 BBA 策略換到更多的汽水，若有則會產生矛盾。

(1) 證明個位數字為 1~4 時，以 BBA 為兌換策略，必可換最多瓶：

原始瓶數 21 瓶=>以 $BBABBA$ 方式兌換=>剩下 $1C1D$ =>無法再換。

此時若單獨把其中一個方案 A 換成一個 B ， D 需要多 2 故不可能。

此時若單獨把其中一個 B 換成一個 A ， C 需要多 4 故不可能。

因此，不可能出現其他兌換方式能夠換到超過 6 瓶，可知此為最佳策略。

原始瓶數 22 瓶=>以 $BBABBA$ 方式兌換=>剩下 $2C2D$ =>無法再換，共換 6 次。

此時若單獨把其中一個 B 換成一個 A ， C 需要多 4 故不可能。

此時雖能將其中 1 個 A 單獨換成 1 個 B ，剩 $6C0D$ ，但也無法再換第 7 次。

因此，不可能出現其他兌換方式能夠換到超過 6 瓶，可知 BBA 策略為最佳策略。

原始瓶數 23 瓶=>以 $BBABBA$ 方式兌換=>剩下 $3C3D$ =>無法再換，共換 6 次。

此時雖有其他換法能達到 6 次 (將其中 1 個 A 單獨換成 1 個 B ，剩 $7C1D$ ，也無法再換第 7 次)，但無法大於 6 次，可知 BBA 策略依舊為最佳策略。

原始瓶數 24 瓶=>以 $BBABBA$ 方式兌換=>剩下 $4C4D$ =>無法再換，共換 6 次。

此時雖有其他種換法能達到 6 次 (將其中 1 個 A 單獨換成 1 個 B ，剩 $8C2D$ ，2 個 A 換成 2 個 B ，剩 $12C0D$ ，或其中 1 個 B 單獨換成 1 個 A ，剩 $0C6D$ ，皆無法再換第 7 次)，但無法大於 6 次，可知 BBA 策略依舊為最佳策略。

(2) 證明個位數字為 5~8 時，以 BBA 為兌換策略，必可換取最多瓶：

原始瓶數 25 瓶=>以 $BBABBAB$ 方式兌換=>剩下 $3C1D$ =>無法再換，共換 7 次。

若把其中一個 A 換成 B 或 B 換成 A ，瓶蓋或空瓶會變成負數，故不可能，可知此為最佳策略。

原始瓶數 26 瓶=>以 $BBABBAB$ 方式兌換=>剩下 $4C2D$ =>無法再換，共換 7 次。

此時雖有其他種換法能達到 7 次 (將其中 1 個 A 單獨換成 1 個 B ，剩 $8C0D$ ，或其中 1 個 B 單獨換成 1 個 A ，剩 $0C4D$ ，皆無法再換第 8 次)，但無法大於 7 次，可知 BBA 策略依舊為最佳策略。

原始瓶數 27 瓶=>以 $BBABBAB$ 方式兌換=>剩下 $5C3D$ =>無法再換，共換 7 次。

此時雖有其他種換法能達到 7 次 (將其中 1 個 A 單獨換成 1 個 B ，剩 $9C1D$ ，或其中 1 個 B 單獨換成 1 個 A ，剩 $1C5D$ ，皆無法再換第 8 次)，但無法大於 7 次，可知 BBA 策略依舊為最佳策略。

原始瓶數 **28** 瓶=>以 *BBABBAB* 方式兌換=>剩下 *6C4D* =>無法再換，共換 7 次。

此時雖有其他種換法能達到 7 次（將其中 1 個 *A* 單獨換成 1 個 *B*，剩 *10C2D*，或其中 1 個 *B* 單獨換成 1 個 *A*，剩 *2C6D*，皆無法再換第 8 次，而顯然 *A*、*B* 互換 2 次亦是如此），但無法大於 7 次，可知 *BBA* 策略依舊為最佳策略。

(3) 證明個位數字為 **9、0** 時，以 *BBA* 為兌換策略，必可換取最多瓶：

原始瓶數 **29** 瓶=>以 *BBABBABB* 方式兌換=>剩下 *5C1D* =>無法再換，共換 8 次。

此時雖有其他種換法能達到 8 次（將其中 1 個 *B* 單獨換成 1 個 *A*，剩 *1C3D*，也無法再換第 9 次），但無法大於 8 次，可知 *BBA* 策略依舊為最佳策略。

原始瓶數 **30** 瓶=>以 *BBABBABB* 方式兌換=>剩下 *6C2D* =>無法再換，共換 8 次。

此時雖有其他種換法能達到 8 次（將其中 1 個 *B* 單獨換成 1 個 *A*，剩 *2C4D*，也無法再換第 9 次），但無法大於 8 次，可知 *BBA* 策略依舊為最佳策略。

需要特別注意的是在原始瓶數為 30 時，能換達 8 次的剩餘的瓶蓋及空瓶數量，為 *6C2D* 與 *2C4D*，也就是說原始瓶數若再多 1 瓶，會剩下 *7C3D* 或 *3C5D*，剛好又能多換 1 次，並且情形又會回到個位數字是 1 的狀況，如此循環下去。

至此，我們已完成 *BBA* 策略為能夠換取最多瓶數的證明，並同時說明了 442 規律會每 10 個循環一次所有狀況，回答完探究目的 3、4、5。

五、結論與生活應用

結論：

1. 在本研究兩個兌換方案之下的最佳兌換策略為 *BBABBAB...* 的兌換方式（中間可以截斷，也可以換順序如 *ABBABB...*，須每三次保持 $A:B = 1:2$ ）-即本文所稱之 *BBA* 策略。
2. 原始瓶數的數量與最多可兌換的瓶數有每 4 個會多 1，之後每 4 個會多 1，再每 2 個會多 1 的 442 規律。

生活應用：

1. 從小問題著手並拓展，研究出最佳方案，未來若有類似優惠活動，可以深入分析優劣勢。
2. 透過深入分析，避免陷入生活中直覺的謬誤，對事情能審慎評估做出適當的決定。
3. 在過程中撰寫了相關程式，未來若有需要可以設計相關程式解決生活問題。

參考資料

游森棚 (2023)。森棚教官的數學題：換汽水。*科學研習*，62(1)，100。

張鎮華 (2015)。可以喝到幾瓶汽水-兼談台灣中小學數學教育。*數學傳播*，39(1)，51-62。

馮子軒與王立安 (2016)。瓶身呀瓶身-飲料兌換問題的推廣研究。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會。

取自網站：找出所有排列的結果，利用 C++ (<https://www.bigcatblog.com/permutation/>)