2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

■國中組　□普高組　□技高組　成果報告格式

題目名稱： 數橋

一、摘要

數橋，是一款關於將島嶼和島嶼之間連結起來的數學遊戲，規則大致上就是:
假如現在地圖上有四座島，島上的數字分別為 5、6、7、8，則數字「8」的島嶼必須連接 8 條線，而且四座島中必須連通，島嶼之間不可斜線連接，原遊戲規則是島嶼的一個方向只能連接兩條線，也就是說一座島嶼的最大數字為 8，而且島嶼的位置與數量是隨機的，為了探討的方便性和找出更多的數學性質，先研究四座島與和五座島嶼，並且把每個方向可連接的橋樑數量改為無上限。

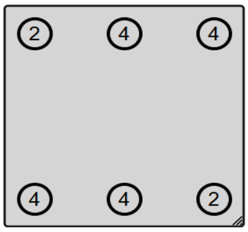
我們將探討的內容分為島嶼數和解法的關係、排列陣法是否影響解的數量、以及各種排列陣法的公式。

二、探究題目與動機

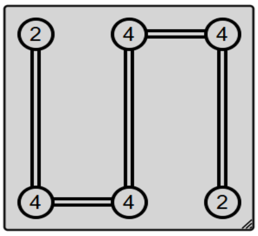
問題來源：因為某天在教室裡看到一個學習單內容有關這個遊戲。後來又看到有一個遊戲網站有類似的遊戲，我們覺得很有趣，所以就開啟了研究。以下是遊戲規則介紹：

目標：繪製符合規定的水平或垂直的橋樑來連接所有島嶼。

規定：1. 橋樑不得交叉（因此不能有斜的橋樑）
2. 島嶼最終必須相互連接（不能有孤立的島）
3. 每個島上的數字必須與其連接的橋樑數量相匹配。



左圖為遊戲給的起始狀態



右圖為我們完成橋梁連接的狀態

三、探究目的與假設

遊戲中島嶼的排列方式是隨機的，因為這樣不方便觀觀察，所以我們決定要固定成某種排列形狀，並且用較少的島嶼來觀察，同時放寬橋梁數量的限制。

我們認為可能會發生的情況有：

1.島嶼所要連接的橋樑數可能會發生沒有辦法連接完所有島嶼的情況。

2.島嶼所要連接的橋樑數可能會發生不只一種連接方式的情況。

3.島嶼可能會因為排列方式的改變而沒有辦法連接完的方式。

4.某種形狀兩座島嶼之間所要連接的橋樑數可能有某種公式。

我們的研究目的是為要驗證上面所提的猜想。

翻轉及旋轉：翻轉或旋轉後相同的圖形，我們視為同一種

四、探究方法與驗證步驟

我們首先簡化島嶼的數量，減至 4 個，並探討 4 個島嶼不同排列方式會有什麼影響。

1. 排列方式一：

X		W
Y		Z

我們發現島嶼上的數字必須符合 $X+Z=Y+W$ 才會有解。

原理：

我們統一將橋梁的數量以小寫字母表示，大寫字母即為島嶼上的數字。

X	d	W
a		c
Y	b	Z

則 $X=a+d$，$Y=a+b$，$Z=b+c$，$W=c+d$，故可得 $X+Z=Y+W$

2. 排列方式二：

X		Y
X		Y

若 X 大於 Y，將會有 Y 組解。

原理：

X	a	Y
$X-a$		$Y-a$
X	a	Y

其中 a 可以是 1, 2, ..., Y，因此有 Y 種解

例如：

5	a	3
$5-a$		$3-a$
5	a	3

a 可以是 1, 2, 3，因此有 3 種解

3. 排列方式三：

X		Z
Y		X

若 $Z > Y$，會有 $[\frac{Y+1}{2}]$ 組解。（註：[ ] 為高斯符號，代表取該數的整數部分。）

原理：

X	a	Z
X-a		Z-a
Y	Y-X+a	X

其中 a 可以是 1, 2, ..., Y，因此有 Y 種解

例如：

5	2+a	7
3-a		5-a
3	a	5

a 可以是 0, 1, 2, 3，但會有翻轉後相同的狀況，$4 \div 2 = 2$，因此只有 2 種解。

以下為翻轉後相同的狀況，這兩種狀況我們視為同一種，因此會需要除以 2

5	2	7
3		5
3	0	5

5	5	7
0		2
3	3	5

4. 排列方式四：

		Z		W
X		Y		

這種情況會只有一種解，且有解的條件是：

1. $X<Y$ 2. $W<Z$ 3. $X+Z=Y+W$

原理：

		Z	c	W
		b		
X	a	Y		

$Z=c+b$ ， $Y=a+b$ ， $Y-a=b$ ， $X=a$ ， $W=c$ ，

故可得：$X<Y$ ， $W<Z$ ， $X+Z=Y+W$

例如：

		7	6	6
		1		
4	4	5		

此種排列方式恰有一種解。

5. 排列方式五：

		W		
Y		Z		X

這種情況，會只有一種解，且有解的條件是：$Z=X+Y+W$

原理：

		W		
		c		
Y	a	Z	b	X

因為 $Y=a$ ， $W=c$ ，$X=b$ ，故 $Z=Y+X+W$

例如：

		4		
		4		
3	3	12	5	5

這種情況恰有一種解

6. 排列方式六：

				Z
W		X		Y

這種情況也會只有一種解，且有解的條件是：$Y+W=X+Z$

原理：

				Z
				c
W	a	X	$\boldsymbol{b}$	Y

$W=a$ ， $X=a+b$ ， $Y=b+c$ ， $Z=c$ ，故可得 $Y+W=X+Z$

例如：

				2
				2
4	4	12	8	10

這種情況恰有一種解

分析上方幾種型式後，後我們認為**沒有形成迴圈**的排列方式（如上面的排列方式四、五、六）都只有 1 種解法。

7. 又根據不同形式，島嶼上的數字不同而形成不同的狀況。

例如：

X		Z
a		
Y	b	X

圖為排列方式三，符合 $2X=Y+Z$ ， $Z > Y$

X	1	2	3	3	4	4	4	5
Y	-1	3	5	4	7	6	5	…..
Z	2	1	1	2	1	2	3	…..
排列方法	0	1	2		3			…..

這種形式會有 X-1 種排列方法。因為如果 Y 或 $Z \geqq X$，就會造成題目無解或相同數目。

接下來確立了排列方法之後，只要看最小數字 *Y*，就能快速判斷有幾種解法。
以下我們依最小數字的奇偶性做分類：

若 *Y* 為奇數

最小數字 *Y*	最少解法	解法數
2	(0,2),(1,1)	2
4	(0,4),(1,3),(2,2)	3
6	(0,6),(1,5),(2,4),(3,3)	4
…..	…..	…..
n(偶數)	(0,n),(1,n-1),......,[(n/2)-1,(n/2)+1],(n/2,n/2)	(n/2)+1

若 *Y* 為偶數

最小數字 *Y*	最少解法	解法數
3	(0,3),(1,2)	2
5	(0,5),(1,4),(2,3)	3
7	(0,7),(1,6),(2,5),(3,4)	4
…..	…..	…..
m(奇數)	(0,m), (1,m-1)......[(m-3)/2,(m+3)/2], [(m-1)/2,(m+1)/2]	(m+1)/2

五、結論與生活應用

結論：1. 有解的情況

(1) 島嶼上的數字 1 只能連接一條橋樑，所以出現一所以出現 1 的排法會有唯一解

(2) 若島嶼之間形成迴圈，則該排法會有不只一種解

2. 根據不同排列方式的島嶼，我們給予以下名詞定義

(1) 迴圈型，島嶼之間能夠形成迴圈的陣法

(2) 直線型，島嶼之間可以一筆畫畫完且沒有形成迴圈的陣法

(3) 射線型，是島嶼連接著超過兩座島嶼形成迴圈的陣法

生活應用：可以用 scratch 創作成一款訓練腦力的遊戲，並且難易程度控制在幼兒也能玩

參考資料

網站出處：Bridges from Simon Tatham's Portable Puzzle Collection
網址連結：**Bridges, from Simon Tatham's Portable Puzzle Collection**