2025年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組 成果報告表單

題目名稱: 皇后遊戲的延伸幾何探索

一、摘要

本篇探究皇后遊戲在不同邊長的正三角形棋盤中，如何用最多和最少步數去填滿棋盤。我們利用自己製作的程式下棋，並記錄下來，去觀察其規律。結果發現:邊長和最多與最少的步數都有關係，再有待去探索延伸的幾何問題。

二、探究題目與動機

在一節專題研究課中，老師帶著我們進行了關於鑲嵌幾何類型的小遊戲。其中有個小遊戲，叫做皇后遊戲。我們從此遊戲中得到靈感，延伸出一種棋類的玩法。

三、探究目的與假設

從皇后遊戲中，我們思考到了關於利用最少步和最多步去填滿邊長不同的正三角形棋盤。按照遊戲所說，最少是幾步才會結束遊戲呢?最多的話呢?步數是否與邊長有關聯?

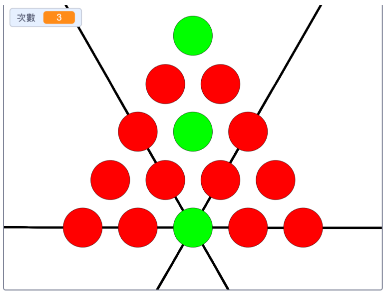
四、探究方法與驗證步驟

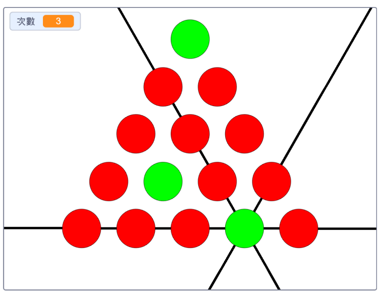
1.研究在填滿正三角形棋盤所需的步數之規律 為了尋找規律，我們用窮舉法找到了邊長1-6的正三角形下法。

此類下法都是無重複的:

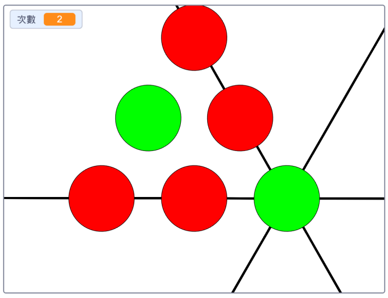
(1)旋轉或鏡像都歸為同一類。

(2)在下一階正三角形時的旋轉或鏡像也是同一類。

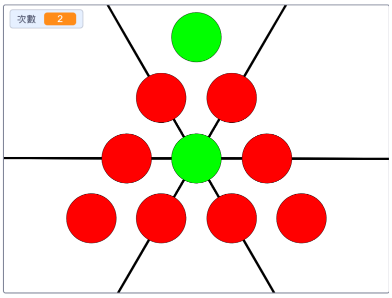
例:


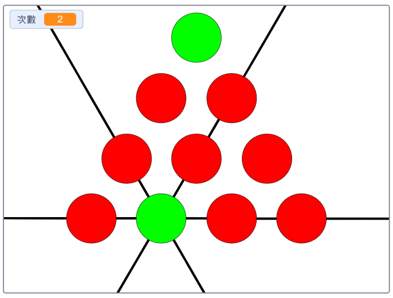


此兩種下法為同一種，裡面邊長為三的正三角形只是旋轉而已。

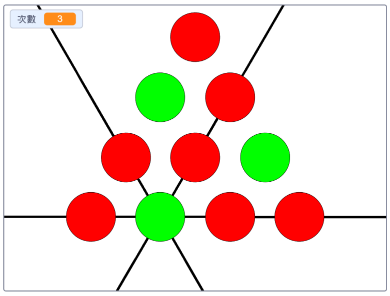


(3)少2多2

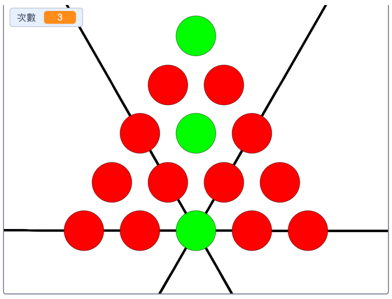


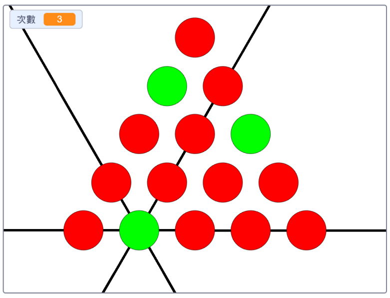


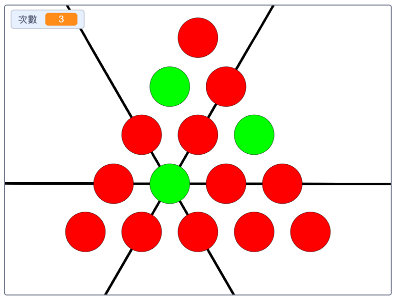
(4)少2

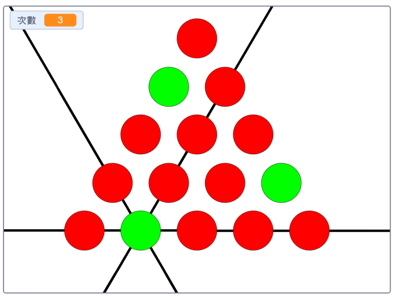


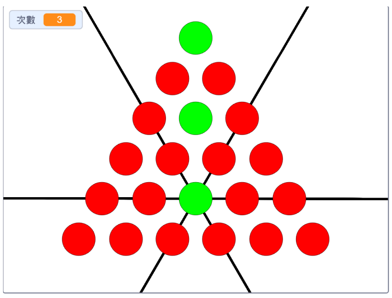
(4)多3

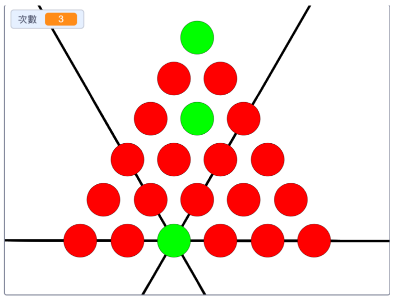


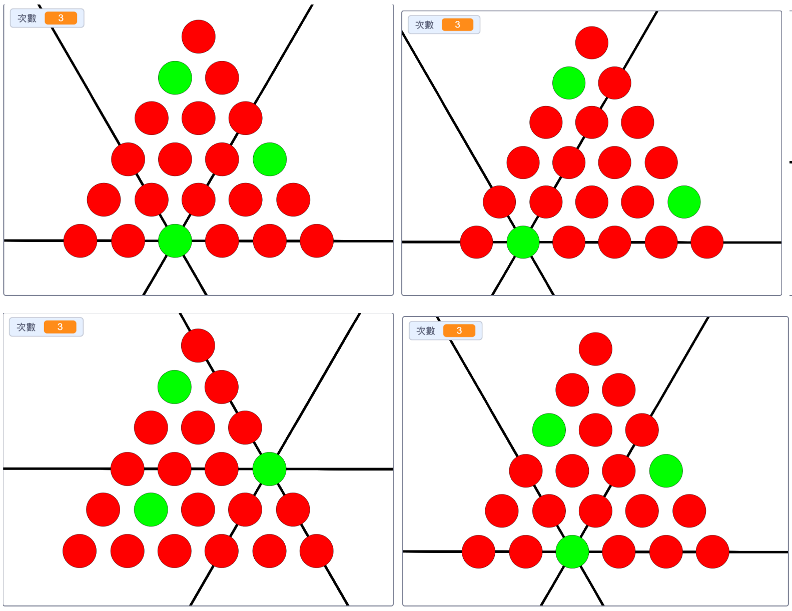




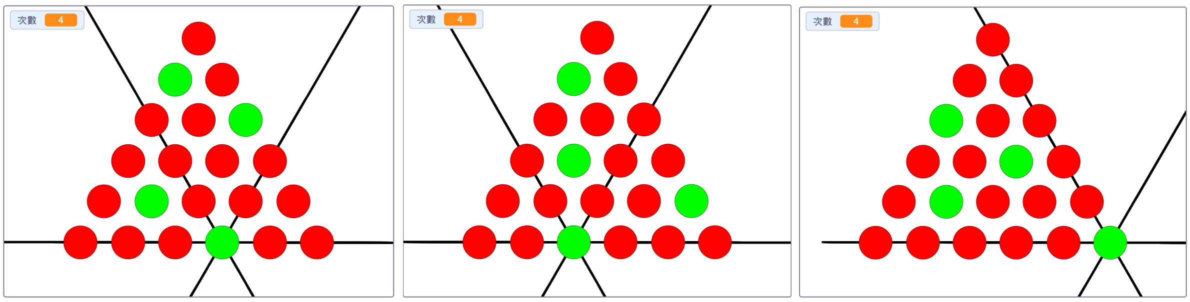








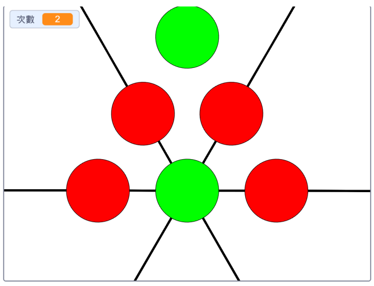
(6)少3



(6)多4

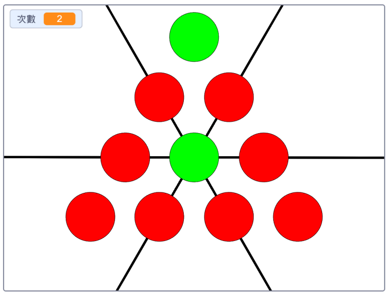
在實驗中，我們發現幾種情況:

(a-3)假如邊長為3，且一直將棋放在正三角形的點及下一階的正三角形的點上時，步數便是2。因為當我們將棋放在正三角形的點上時，剩下的格子則會變成一個邊長皆為1的正三角形，然後繼續放在此正三角形的點上。

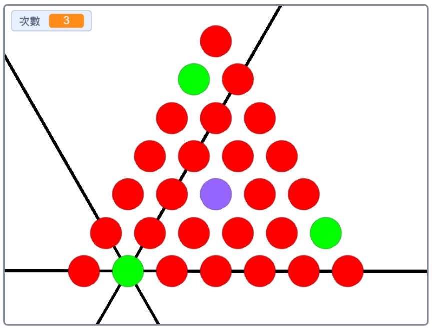


(a-3)

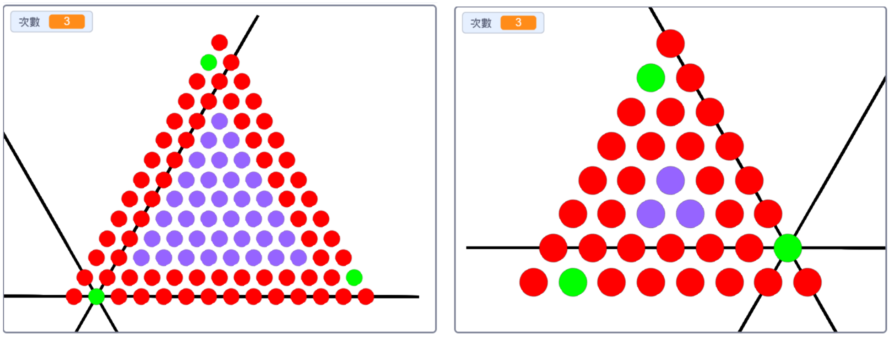
(a-4)假如邊長為4，且一直將棋放在正三角形的點及下一階的正三角形的點上時，步數便是2。因為當我們將棋放在正三角形的點上時，剩下的格子則會變成一個邊長皆為2的正三角形，然後繼續放在此三角形的點上。

(a-4) 

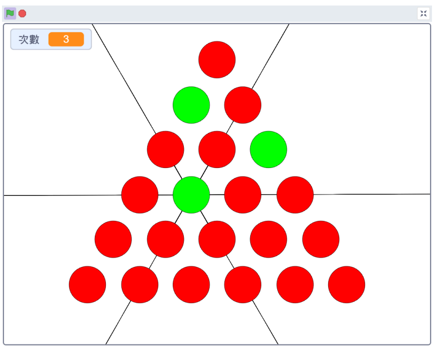
(b-7)假如邊長為7，若從點開始數的第2個開始下的話，有一個邊長為1更小的小三角形。

(b-7) 

(b-14)假如邊長為14，若從點開始數的第2個開始下的話，有一個小的邊長為8的正三角形。而它又可以按照上面的下法，變成一個邊長為2更小的正三角形。

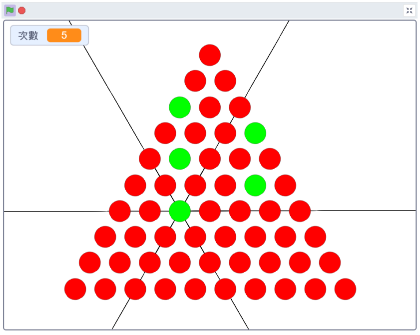
(b-14) 

(c-2~6)假如邊長為n，且$2 \leq n \leq 6$時，可一直將棋放在斜下角30度上直到下完全部格子。(c-6)



把棋子下在第2列的邊上，一直將棋放在斜下角30度上直到下完全部格子(至多可以下3格)。

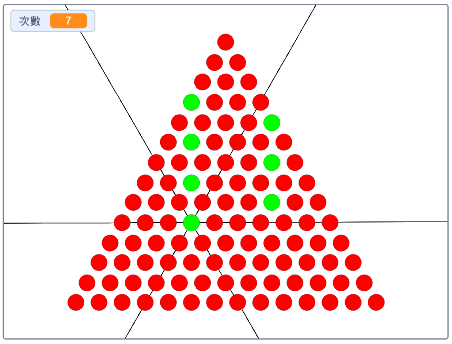
(c-4~10)假如邊長為n，且$4 \leq n \leq 10$時，可一直將棋放在斜下角15度上直到下完全部格子。



(c-10)

把棋子下在第3列的邊上，一直將棋放在斜下角15度上直到下完全部格子(至多可以下5格)。

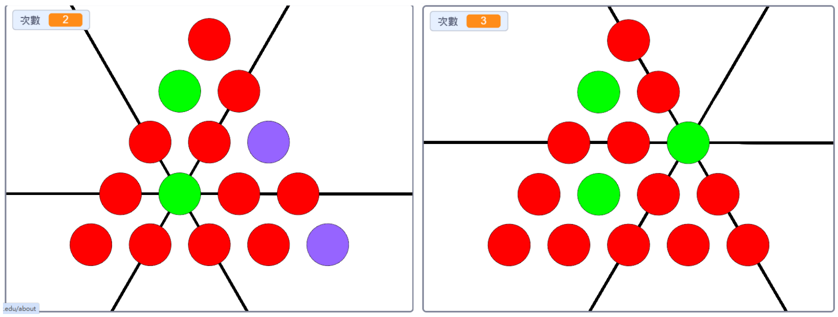
(c-6~14)假如邊長為n，且$6 \leq n \leq 14$時，可一直將棋放在斜下角7.5度上直到下完全部格子。



(c-14)

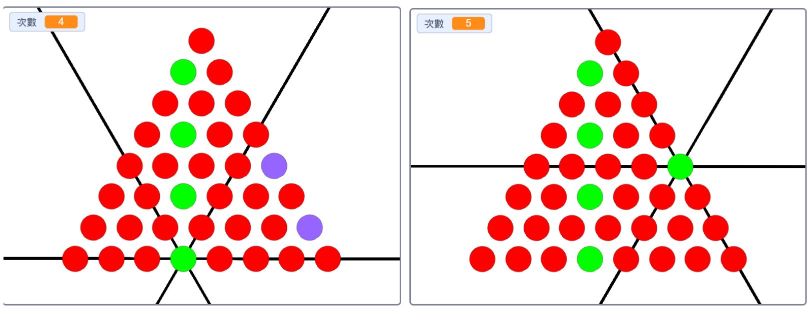
把棋子下在第4列的邊上，一直將棋放在斜下角7.5度上直到下完全部格子(至多可以下7格)。

(d-5)假如邊長為5，且將棋一開始放在邊上，然後一直往下點，直到無法點為止，這時會剩下一步。



(d-5)

(d-8)假如邊長為8，且將棋一開始放在邊上，然後一直往下點，直到無法點為止，這時會剩下一步。



(d-8)

五、結論與生活應用

(a)假如邊長為n，且將棋一開始放在點上，然後一直往下點，直到無法點為止，這時會剩下一個點。由此可知，我們可以提出一個式子：需要(n/2)然後無條件進位的步數。

(b)假如邊長為n，若從點開始數的第2個開始下的話，之後中間便會變成一個邊長為(n-6)的正三角形，可對照之前做過的那些三角形。所以，只需要做邊長為1-6的正三角形之下法，即可推照邊長為n的正三角形的步數及下法。公式為:m為一自然數，若$6(m-1)<n<6m$，則步數可為$3(m-1)+$(邊長為$(n-6(m-1))$之正三角形步數)。

(c)假如邊長為n(m,n皆為正整數)，且$2m \leq n \leq 4m+2$時，先將第一步下在第(m+1)格的邊時，可一直將棋放在斜下角(30/2^(m-1))度上直到下完全部格子。

(d)假如邊長為n，且將棋一開始放在邊上，然後一直往下點，直到無法點為止，這時會剩下一個點。由此可知，我們可以提出一個式子：(n/2)並無條件退位後+1步。

參考資料

17皇后遊戲…如何后不見后呢？

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/1066/17%20saymathsgame.pdf