

2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

• ☒ 國中組 ☐ 普高組 ☐ 技高組 成果報告格式

題目名稱：你看我們超會算

一、摘要

- 1、本研究的動機源於對歐基里德著作《幾何原本》的好奇，進而關注演算法，特別是質數在輾轉相除法中的規律。
- 我們的研究目的為探討質數在輾轉相除法中的模式，並比較質數相減至 1 的次數與輾轉相除法的步驟數是否相同。
- 2、研究方法包括透過 師大數學系 胡政德設計 許志農教授指導製作的 歐基里德的算，使用減法觀察質數相減的結果，並比較與輾轉相除法求 1 所需步驟的關係。
- 3、研究結果顯示，質數的相減次數與輾轉相除法的步驟數可能存在規律。

二、探究題目與動機

在學習數學的過程中，我們對歐基里德的著作《幾何原本》產生了興趣，其中提到的輾轉相除法，是一種找最大公因數的經典方法。然而，我們發現如果使用質數來進行輾轉相除法，是否會有特殊的規律尚未被深入探討。因此，我們希望透過本研究來分析質數在輾轉相除法中的行為，並觀察其與質數相減至 1 步驟數之間的關係。

三、探究目的與假設

1、探究目的

- (1)質數在做輾轉相除法有沒有規律。
- (2)做質數相減時得到這個數字所相減的次數和輾轉相除法的步驟數是否相同。

2、假設

- (1)質數在輾轉相除法中會遵循一定的規律。即對於任意兩個質數，使用輾轉相除法的步驟數會與它們的數學性質有關。

(2)質數相減至 1 的次數與輾轉相除法的步驟數相同。當使用質數進行輾轉相除法時，反覆相減直到 1 出現的步驟數應該與輾轉相除法的步驟數一致，這兩者之間可能存在某種對應關係。

(3)質數相減至 1 的次數與兩個質數的差值有關。我們假設質數之間的差異(例如 23 和 17 的差為 6)在相減過程中會影響最終所需的步驟數。

四、探究方法與驗證步驟

1、探究方法

我們找了遊戲歐基里德的算，用減法來看質數相減出來的答案來看如何最快按出 1 這個答案在做輾轉相除法看按到 1 的次數和輾轉相除法的次數是否相同來找規律。根據二元一次方程式 $ax+by=1$ 有解的條件為(a,b)會是 c 的因數，因我們的目標為 1 即 $ax+by=1$ ，所以 a,b 需互質才有解 x.利用科學原理，透過觀察或進行實驗來蒐集新的訊息，以驗證假設成立。

2、.驗證步驟

61	59					61	53				
① 2		1	61	59	29	① 8		1	61	53	6
② 57			59	58		② 45			53	48	
③ 55			2	1		③ 16		1	8	3	1
④ 53						④ 29			5	3	
⑤ 51						⑤ 13			1	1	
⑥ 10						⑥ 3					
⑦ 41						⑦ 5					
⑧ 31						⑧ 2					
⑨ 21						⑨ 1					
⑩ 11											
		1+2+1=3						1+1+1+1+6=10			

61	29		61	7	
① 32 ② 3 ③ 26 ④ 23 ⑤ 9 ⑥ 14 ⑦ 5 ⑧ 2 ⑨ 1	2 1	61 58 3 2 1	27 9	① 54 ② 47 ③ 14 ④ 33 ⑤ 19 ⑥ 5 ⑦ 2 ⑧ 3 ⑨ 1	8 2
		2+1+9=12			8+2+1=11

61	5		61	3	
① 56 ② 51 ③ 46 ④ 41 ⑤ 20 ⑥ 21 ⑦ 1	12	61 60 2	5	① 58 ② 55 ③ 52 ④ 49 ⑤ 12 ⑥ 37 ⑦ 25 ⑧ 13 ⑨ 1	20
		12+0=12			20+0=20

67	61		67	31	
① 6 ② 55 ③ 49 ④ 18 ⑤ 31 ⑥ 13 ⑦ 7 ⑧ 1	1	67 61 6	61 60 1	① 36 ② 31 ③ 26 ④ 10 ⑤ 16 ⑥ 6 ⑦ 1	10
		10+1=11			2+6=8

71		37						71		23					
①	34	11	71	37	11	34	3	1	①	48	3	71	23	11	
②	3		37	34		②	25		69	22					
③	31		34	3		③	2		2	1					
④	28		33	1		④	21								
⑤	25		1			⑤	19								
⑥	12					⑥	17								
⑦	13					⑦	8								
⑧	1					⑧	9								
				1+11+1=13								3+11=14			

71	7				71	3					
① 64		10	71	59	① 68	⑪ 1	23	71	3	1	
② 57			70	58				② 65	69		2
③ 50			1					③ 62	2		1
④ 43							④ 59				
⑤ 28							⑤ 56				
⑥ 15							⑥ 15				
⑦ 8							⑦ 41				
⑧ 1							⑧ 26				
		10+0=10			⑨ 11						
					⑩ 4						

所有不成功的

97:	89:	83:	79:	73:
(97,89)	(89,83)	(83,79)	(79,73)	(73,71)
(97,37)	(89,59)	(83,71)	(79,71)	(73,67)
(97,31)	(89,53)	(83,43)	(79,43)	(73,7)
(97,7)	(89,47)	(83,7)	(79,41)	(73,5)
(97,5)	(89,43)	(83,5)	(79,37)	
	(89,41)	(83,3)	(79,31)	
	(89,29)		(79,29)	
	(89,13)		(79,7)	
	(89,7)		(79,5)	
	(89,5)		(79,3)	

所有不成功的

71:	67:	61:	59:	53:
(71,67)	(67,61)	(61,59)	(59,53)	(53,7)
(71,37)	(67,31)	(61,53)	(59,19)	(53,5)
(71,23)	(67,23)	(61,29)	(59,17)	(53,3)
(71,7)	(67,7)	(61,7)	(59,13)	
(71,5)	(67,3)	(61,5)	(59,5)	
(71,3)		(61,3)	(59,3)	

所有不成功的

47:	41:	37:	31:	29:
(47,43)	(41,37)	(37,5)	(31,29)	(29,5)
(47,41)	(41,5)	(37,3)	(31,5)	(29,3)
(47,5)	(41,3)		(31,3)	
(47,3)				

所有不成功的

23:	19:	43:		
(23,3)	(19,17)	(43,41)		
		(43,37)		
		(43,23)		
		(43,5)		

五、結論與生活應用

1、結論

發現 67,61,59,47,89,83,79,71,41,19 的不合中發現第一個不合的 b 都是跟 a 相鄰的質數，在這些不合中個位數的 b 通常都會有如 7,5,3 中的奇數。

2、生活中的應用

(1)數學與教育：學習這些數論概念有助於理解比例、分數約分，提升數學推理能力，這對於金融、統計等領域也很重要。

(2)音樂與藝術：在音樂節奏與拍號計算中，GCD 可用來分析不同節奏的最小重複單位，使不同的節奏組合更加和諧。

六、參考資料

師大數學系胡政德設計許志農教授指導的 歐基里德的算