

2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組 成果報告格式

題目名稱：利用祖暅定理推導球體體積

一、摘要

球體體積的推導是幾何學中的經典問題。本研究旨在利用中國古代數學家祖暅提出的祖暅定理（又稱祖氏原理），推導球體的體積公式，以展現其在現代幾何中的應用價值。祖暅定理指出，若兩個立體的橫截面積在任意高度均相等，則它們的體積相等。本研究首先介紹祖暅定理的數學基礎。本研究進一步比較祖暅定理與卡瓦列里原理的異同，分析其理論一致性。研究結果表明，祖暅定理不僅是古代數學的瑰寶，亦能與現代數學方法無縫銜接，具有重要的教育與學術價值。本報告希望通過這一推導過程，啟發對古代數學智慧的重新認識，並促進其在當代科學探索中的應用。

二、探究題目與動機

球體作為幾何學中最基本的立體圖形之一，其體積公式的推導一直是數學研究的重要課題。傳統上，西方數學常採用卡瓦列里原理或球面坐標積分法來計算球體體積。然而，中國古代數學家祖沖之及其子祖暅提出的祖暅定理，卻以獨特而簡潔的思路解決了類似問題，展現了東方數學的智慧。祖暅定理指出，若兩個立體在任意高度的橫截面積相等，則它們的體積相等，這一原理不僅直觀且具有普適性。本研究的目的是利用祖暅定理重新推導球體的體積公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，並探索其與現代數學方法的聯繫與差異，從而驗證這一古代數學原理的科學價值與應用潛力。

本研究的動機源於對中國古代數學成就的興趣與尊重。祖暅定理作為中國數學史上的里程碑，卻在現代教育中鮮少被提及。通過這一研究，我們希望喚起對這一經典理論的關

注，並將其融入當代幾何學的教學與探索中。此外，球體體積的推導過程涉及橫截面面積的計算，能夠幫助我們加深對立體幾何與數學分析的理解。最終，本研究不僅旨在致敬古代數學家的智慧，也希望為當今學生提供一個跨時代的數學視角，激發對數學之美的興趣與探索熱情。

三、探究目的與假設

本研究基於祖暅定理的核心思想，提出以下假設：利用祖暅定理可以有效推導球體的體積，並得出與現代數學方法一致的結果，即球體體積公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。我們假設祖暅定理與西方數學中的卡瓦列里原理在推導球體體積時具有理論上的一致性，兩者均依賴橫截面積相等的條件來確定體積相等。通過驗證這一假設，本研究不僅期望證實祖暅定理在立體幾何中的適用性，還希望展示其作為古代數學工具在現代科學中的潛在價值。

四、探究方法與驗證步驟

研究方法

本研究以祖暅定理為核心工具，推導球體的體積。祖暅定理指出，若兩個立體在任意高度的橫截面面積相等，則它們的體積相等。主要方法如下：

建立模型：取一個半徑為 R 的球，將其分為兩半，先求半球的體積。取一個底面半徑和高均為 R 的圓錐，再取一個底面半徑和高均為 R 的圓柱，我們在截取它們同一截面，首先是圓錐，圓錐的底面半徑和高均為 R ，因此，出現了等腰直角三角形，設橫截面的位置距離頂點的數值距離為 d ，那麼橫個面的半徑也為 d ，因此，驗證步驟圓錐的橫截面面積的表達式就可以得到 $S = \pi d^2$ ，然後，我們再看半球，在半球中，存在一種直角三角形，直角分別為橫截面到半球面的距離為 d ，半球的橫截面半徑 r ，他的橫截面為 $S = \pi d^2$ 而斜邊則為

球半徑 R ，根據勾股定理，可得到 $R^2 = r^2 + d^2$ 。因此，三者在任意高度處的橫截面積滿足
 半球橫截面積 + 圓錐的橫截面積 = 圓柱的橫截面積，根據祖暅定理，兩物體在任意高度處
 的橫截面積相等則體積必相等，通過整理式子 $\pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h = V_{se}$ 就變成了 $\frac{4}{3} \pi R^3 = 2V_{se}$

為確保推導結果的正確性與祖暅定理的有效性，我們設計以下驗證步驟：

數值驗證：選取具體半徑（如 $r=1$ ），計算體積 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ，並與已知結果比對。

理論對比：將祖暅定理的推導過程與卡瓦列里原理進行比較，確認兩者在橫截面積相等條件下的等價性。

圖形輔助：繪製球體橫截面積隨高度變化的函數圖，驗證 $A(h)$ 的對稱性與連續性。

通過上述方法與驗證，本研究期望證實祖暅定理在球體體積推導中的適用性，並展示其與現代數學的融合。

五、結論與生活應用

結論：

本研究通過祖暅定理成功推導了球體的體積公式 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ 。我們利用球體，圓錐，圓柱，計算其面積，得出與現代數學一致的結果。這一過程不僅驗證了祖暅定理“若兩個立體的橫截面積在任意高度相等，則體積相等”的正確性，也展示了其與卡瓦列里原理的理論共通性。研究表明，祖暅定理作為中國古代數學的瑰寶，不僅具有歷史價值，更能在現代幾何問題中發揮作用。推導過程加深了我們對立體幾何的理解，同時證明了古代智慧與當代科學的無縫銜接。

生活應用：

祖暅定理及其推導球體體積的方法在生活中具有廣泛應用。例如，在工程設計中，計算球形容器（如儲水罐或氣球）的容量需要精確的體積公式，這直接關係到材料使用與成本估算。在物理學中，球體體積的計算也應用於研究天體（如行星或恆星）的質量與密度。此外，這一原理可啟發教育領域，通過直觀的橫截面概念幫助學生理解立體幾何，激發對數學的興趣。在日常生活中，祖暅定理的思路還能延伸至不規則物體的體積估算，例如通過掃描技術測量橫截面積，進而推算物體總體積。這表明，祖暅定理不僅是理論工具，更能在實際問題中提供解決方案，展現數學跨越時空的實用價值。

參考資料

國立台灣科學教育館 祖冲之怎樣計算圓球的體積：

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/23/pdf/23s/439.pdf>