

2025年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

高中(職)組 成果報告表單

題目名稱:困擾科學家多年的線___最速降線

一、摘要

本次最速降線實驗以水管模擬墜速軌道，以彈珠模擬墜落物體，但由於曲率在實驗當中不易計算，因此本次實驗皆已彎曲水管後極端點的切線斜率以 $\tan$ 表示當 $\tan$ 值越大代表彎曲程度越大，接著以彈珠在水管較高處墜落，當彈珠從另一端出來後停止計時，以此作為物體運動時間，以彈珠入水管位置及彈珠出水管位置的直線連接作為位移，以計算速度，解此來了解曲率(彎曲程度)跟物體速度間的關係

二、探究題目與動機

在現代社會當中，許多人都會想為了尋求刺激，不斷地在尋找高速，令人心跳加速的遊樂設施或是消遣活動，然而在這些刺激性活動例如雲霄飛車或是對於小朋友來說刺激的溜滑梯，大概率都與的約翰·白努利最速降線實驗相符，都大概都是物體從高處墜落在不同曲率或是斜率的軌道而改變物體的能量差，並且曾不同斜率的滑梯中發現在某些彎曲且距離較長的軌道卻更快到地面的例子，因此突發奇想了解溜滑梯與約翰·白努利最速降線實驗的關聯性以改變斜率或是曲率來了解在怎樣的情況下，物體下墜在哪些曲率的軌道時物體可獲得的能量及速率可以達到最大，藉此了解在怎樣的情況下可以幫助人們達成心目中理想的最速的刺激遊戲

三、探究目的與假設

我們認為當物體做最速運動的時候，根據位能的概念可以假設出當初使物體從較高處滑落時物體可以獲得的能量也就較大，因此我們做出:(第一假設)，認為當曲率較大物體可以再初始獲得最大能量，根據力學能守恆當初使獲得能量越大，到最末端能量全部化為動能後速率可以達到最大，因此提出假設當物體做墜速實驗時，墜速軌道曲率越大下墜速率越快 為了測試看看，碰撞下是否會發生因此做出雙顆碰撞情況下的實驗做出:(第二假設)，認為大物體碰撞後，會獲得較大的能量使物體下墜速度較快

四、探究方法與驗證步驟

(一)實驗材料

水管1條、正方形鐵網6個、束帶1包、彈珠2顆、量尺、手機

(二)實驗裝置

實驗一:單顆最速實驗

Step1.以正方形鐵網架構出直角坐標軸

Step2.以束帶做出曲線,用束帶固定於X軸與Y軸正向

Step3.於Y軸的水管開口處投入彈珠,按下計時,當彈珠從X軸開口處出來時,停止計時

Step4.用量尺測量其曲線最低點的切線tan值(X軸到原點作為X變化量, Y軸到原點的距離為Y軸變化量)

實驗二:雙顆最速實驗

Step1.以正方形鐵網架構出直角坐標軸

Step2.以束帶做出曲線,用束帶固定於X軸與Y軸正向,以單顆最速實驗量測出的tan做連續性實驗

Step3.於Y軸的水管開口處投入彈珠,按下計時,放下後接著放下另一顆,當彈珠從X軸開口處出來時,停止計時

(三)實驗數據

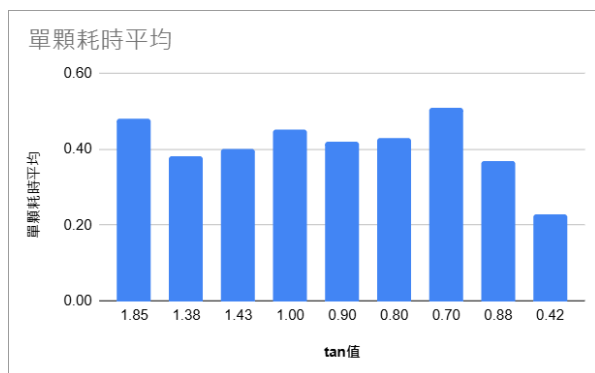
實驗一: 單顆最速實驗

tan	1.85	1.38	1.43	1.00	0.90	0.80	0.70	0.88	0.42
單顆耗時(s)									
1	0.29	0.42	0.36	0.54	0.46	0.43	0.51	0.36	0.25
2	0.48	0.40	0.42	0.36	0.45	0.42	0.55	0.39	0.27
3	0.66	0.33	0.43	0.44	0.35	0.43	0.46	0.36	0.16
單顆耗時平均	0.48	0.38	0.40	0.45	0.42	0.43	0.51	0.37	0.23
總平均	0.41								

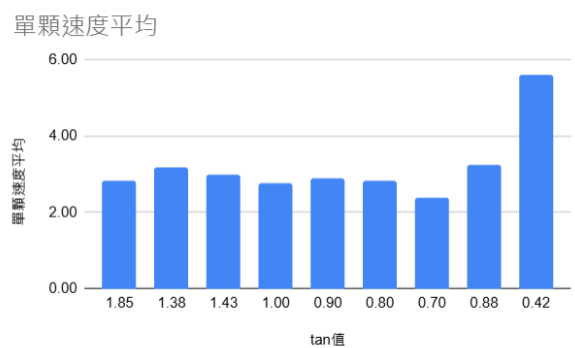
(表一)

tan	1.85	1.38	1.43	1.00	0.90	0.80	0.70	0.88	0.42
單顆速度(水管長度為1.2公尺)(m/s)									
1	4.14	2.86	3.33	2.22	2.61	2.79	2.35	3.33	4.80
2	2.50	3.00	2.86	3.33	2.67	2.86	2.18	3.08	4.44
3	1.82	3.64	2.79	2.73	3.43	2.79	2.61	3.33	7.50
單顆速度平均	2.82	3.16	2.99	2.76	2.90	2.81	2.38	3.25	5.58
總平均	3.18								

(表二)



(圖一)



(圖二)

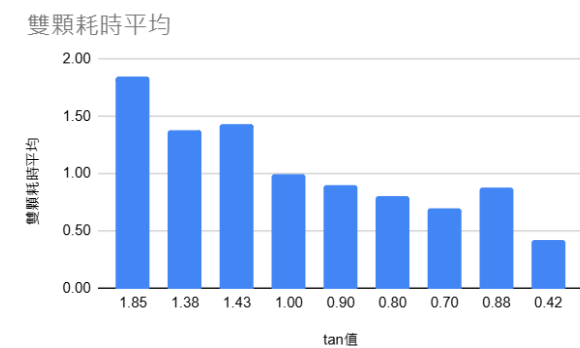
實驗二:雙顆最速實驗

tan	1.85	1.38	1.43	1.00	0.90	0.80	0.70	0.88	0.42
雙顆耗時(s)									
1	0.40	0.53	0.39	0.36	0.32	0.58	0.32	0.29	0.38
2	0.33	0.40	0.45	0.31	0.35	0.59	0.38	0.31	0.37
3	0.36	0.33	0.43	0.35	0.35	0.41	0.29	0.40	0.39
雙顆耗時平均	0.36	0.42	0.42	0.34	0.34	0.53	0.33	0.33	0.38
總平均	0.38								

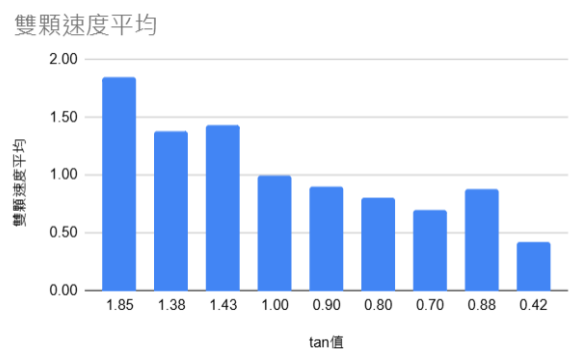
(表三)

tan	1.85	1.38	1.43	1.00	0.90	0.80	0.70	0.88	0.42
雙顆速度									
1	3.00	2.26	3.08	3.33	3.75	2.07	3.75	4.14	3.16
2	3.64	3.00	2.67	3.87	3.43	2.03	3.16	3.87	3.24
3	3.33	3.64	2.79	3.43	3.43	2.93	4.14	3.00	3.08
雙顆速度平均	3.32	2.97	2.84	3.54	3.54	2.34	3.68	3.67	3.16
總平均	3.23								

(表四)



(圖四)



(圖五)

(四)數據分析

實驗一:單顆最速實驗

從表一及表二可以看到當tan值越小,也就是角度越小越趨於平緩時,彈珠得耗時就越小,速率也就越小因此與實驗最初假設不同,tan值越小反而速率越快,可知在最速降線中,tan值並不會直接影響最速物體在行落體運動時的速度

實驗二:雙顆最速實驗

從表三及表四可以看到當最速物體有受碰撞時,相較於實驗一對應的tan值是呈現大致反比的狀況,在雙顆實驗中tan值越大反而速率越快,因此雙顆實驗中可以發現,第一tan值越小反而速率越慢,第二與實驗一的實驗結果可以發現大致呈現反比,可知物體是否有發生碰撞在此實驗中影響力大過於tan值得影響力,在特定的tan值如1.85及1.00符合實驗假設,然而並非全部實驗數據,可知在最速降線中,tan值並不是最直接影響最速物體在行落體運動時的速率的因素

(五)最速降線方程式

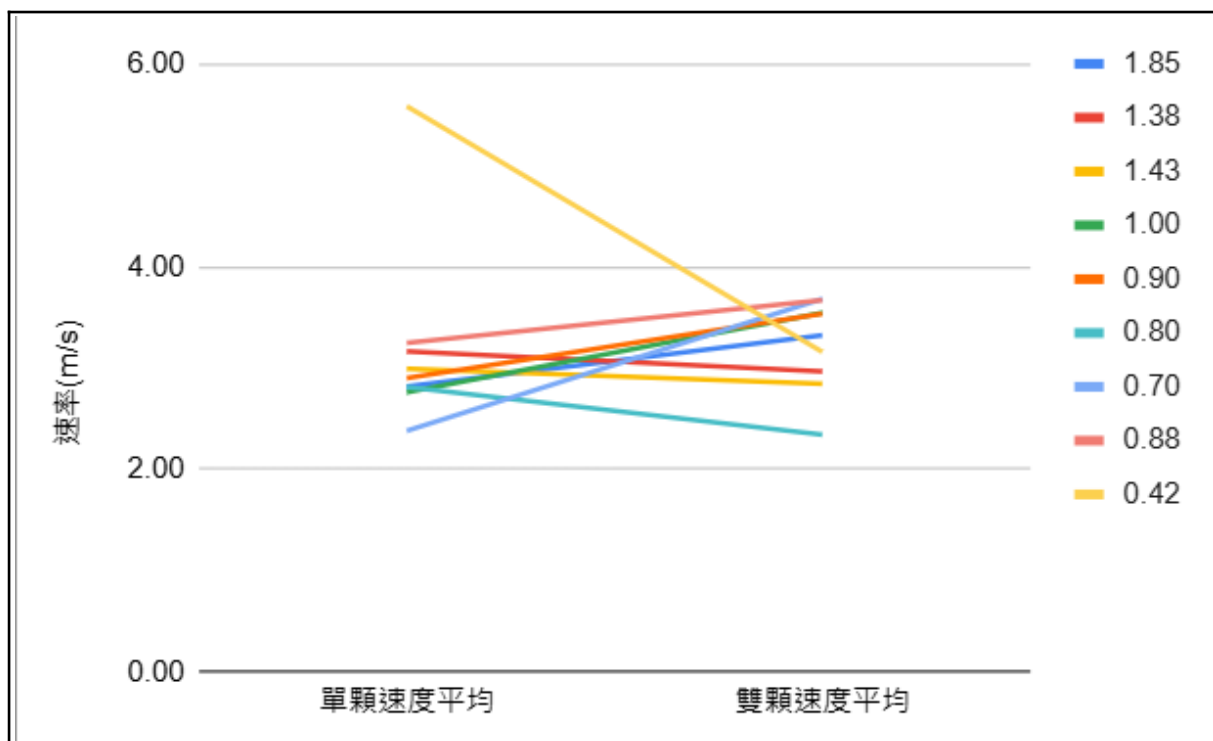
Diagram: A circle in a coordinate system with origin at the top-left. The circle passes through the origin. The angle θ is measured from the horizontal axis to the radius.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = r - r \sin \theta \\ y = r - r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r(1 - \sin \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases} \\ & \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r \sin \theta}{r(1 - \cos \theta)} \rightarrow \text{倍數公式} \\ & \Rightarrow \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} \\ & \text{求導一次: } \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right) \\ & \Rightarrow \frac{d(\cot \frac{\theta}{2})}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\cot \frac{\theta}{2})}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \rightarrow r(1 - \cos \theta) \\ & \Rightarrow -\frac{1}{2} \csc^2 \frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ & \Rightarrow -\frac{1}{4r} \csc^4 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

參數式解釋:(上圖的T就是 θ)

以現學的知識就只能以參數式表示了,擺線的概念可以知道當完成一周期擺線運動時,畫在直角坐標系後可以發現圓以X軸通過時,移動X軸位移正是圓的周長若此圓令其為單位圓,則X軸所經過的位移就是2,所以當今天放到一個不是繞行一圈的圓上,以一點作為繞行點,當繞行角後X軸的變化量依舊是,不過由於方程式是以繞行點為移動因此應當扣掉sin可以得到X軸座標, $X = \theta - \sin \theta$, 同樣的Y軸可以知道要以半徑扣除掉 $\cos \theta$ 因此可以得到 $Y = 1 - \cos \theta$, 後面在對 θ 做為分利用被角公式展開後約分,在取導函數可得上述方程式

(六)綜合數據



(圖五)

(七)統整數據分析

總的來說最速降線與tan值並無太大關聯在實驗一中可以發現，角度越小速率越大越快，不過依此原理雙顆實驗毅然，不過當經過碰撞後，發現與實驗一大致呈現反比關係，因此可以了解到碰撞產生的力量的影響大過於，tan值的變化本次實驗可以發現，第一當角度越小反而速率越快，推測似乎在重力影響下較短的Y軸變化反而能量可以最好的發揮作用使得速率最快，第二可以發現當碰撞過後，速率會更具角度的有所不同而出現不同的變化，第三取最快的角度來看也可以發現當出現碰撞時似乎有能量上的減損使得速率下降，依照表二及表四的總平均也可發現能量可能有減損的事情發生，再者公式推導的過程也可以發現當角度不同時公式會出現不同的值，原因推測有二，其一最速降線並非只有單一一條而是依據不同的半徑可以出現不同的最速降線，其二，最速降線與物體運動半徑有關依據半徑可以找到不同的最速曲，此次的實驗可以利用於不同的工程設計上，如中國的古老建築的弧度設計幫助在下雨天時落於屋頂的水滴可以最快的滑落於地面上，也就是可以最快的離開屋頂減少屋頂積水的問題等等.....

參考資料

https://youtu.be/6Ik0n_OggkA?si=9Ks8Ma-o5aYZG_UF

最速降線方程式推導

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%9C%80%E9%80%9F%E9%99%8D%E7%B7%9A%E5%95%8F%E9%A1%8C>

最速降線及其歷史