

2025 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

大專/社會組 科學文章格式

文章題目：函數與倒數

摘要：探討函數極限處的連接

文章內容：(限 500 字~1,500 字)

為何當函數衝到無限時，有時會從另一邊過來，有時不會？當對一個函數倒數的時候，它發生了什麼？為什麼有些函數在某些地方的值是無窮，在下一瞬間又回到了負無窮？但有些卻是折返回來，甚至是原地消失，根本沒有上下跑的趨勢。一樣都是不存在，但極限處的結果卻差異極大，影響它們的走向的，究竟是什麼？通常會有不存在的值的是分式函數，而不難猜測的，如果斷點處的分母左右極值的正負不同，函數值會從無窮處穿越到另一端，否則會折返回來。至於原地消失的，則是因為分母是分子的因式，也就是說在分母不為 0 時，他會完全抵消與分子相同的部分，為 0 的時候變成除 0，所以就消失了。

至於這些現象，可以用倒數去理解與觀察，既然不存在是因為分母為 0，那把分式倒過來就是值為 0，那就可以藉由觀察這些倒數與原函數的圖形，去理解函數到底發生了什麼。在此之前，先構造一個能夠完整看到函數的坐標系，把整個直角坐標系映射到 2×2 的正方形裡，方法是 $0 \sim 1$ 對應 $0 \sim 1$ ， $1 \sim 2$ 對應 $1 \sim \infty$ ，想法類似於透鏡成像，但概念不太一樣。而這裡的重點是 $1 \sim 2$ 要怎麼對應 $1 \sim \infty$ ，借鑒自 $0 \sim 1$ 的倒數可以映射 $\infty \sim 1$ 這件事，可以把大於 1 的數字取倒數，然後再與 2 求距離。例如說 3 對應到 $1/3$ ， $2 - 1/3 = 1 + 2/3$ 大約為 1.66...，這代表 1.66... 這個值對應到的數字就是 3。把它對應到坐標系中，寫成一個定義域為 $R - [-1, 1]$ ($-\infty \sim -1, 1 \sim \infty$)、值域為的函數 $(-2, -1) \cup (1, 2)$ ($-2 \sim -1, 1 \sim 2$) 的函數。第一步，把值對應到倒數 ($1/x$)。第二步，用 2 減去相應的值 ($2 - 1/x$)。第三步，考慮到負數，所以給 2 乘上一個取符號的函數 ($|x|2/x - 1/x$) (也可用 sgn 函數，但因為定義域沒有 0，所以可以放心這樣寫)。這就成功地製造了映射函數，但光有這個不夠，首先我們需要的是反向映射，因為是 1.5 要表示 2、1.66 要表示 3，所以要反過來先拿有改過符號的 2 減去數字 ($x2/|x| - x$)，再把它倒數 ($1/x(2/|x| - 1)$)，然後就可以把它叫做 $d(x)$ (因為是映射定義域(domain)，所以叫 d)。那我們剛剛做的映射函數有什麼用呢？其實因為剛剛把 $f(x)$ (你想操作、顯示的函數) 的輸入反向映射後， $1 \sim 2$ 對應的 y 會是 $1 \sim \infty$ ，反之， $-1 \sim -2$ 也是一樣，所以 y 是可能跑到 $2 \sim \infty$ 或 $-2 \sim -\infty$ 這兩個區間的，而這時的映射函數就可以用在這上面，我們稱它為 $r(x)$ (映射到值域(range)，所以叫 r)。現在萬事俱備，只欠東風，我們現在分別只處理了座標上 $|x| > 1$ 跟 $|y| > 1$ 的圖形，我們還要把他跟不變的圖形相接，所以可以分成四個部分，分別是輸入小於 1 且輸出小於 1、輸入大於 1 但輸出小於 1、輸入小於 1 但輸出大於 1、輸入大於 1 且輸出大於 1 (輸入輸出都要加絕對值後跟 1 比較)，他們應該分別如下圖。

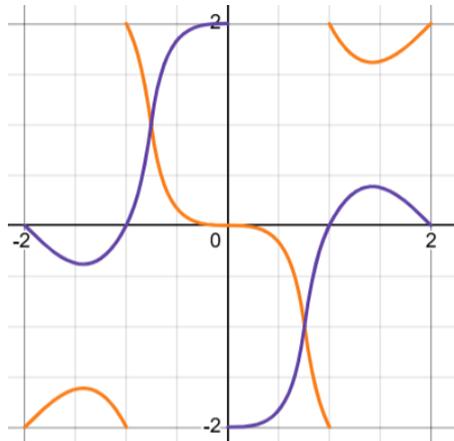
$$y = r(f(d(x)))$$

$$y = kf(d(x)) \{ |f(d(x))| \leq 1 \}$$

$$y = r\left(f\left(\frac{x}{k}\right)\right) \{ |x| \leq k \}$$

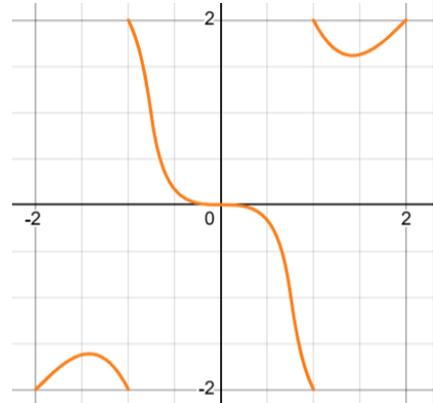
$$y = kf\left(\frac{x}{k}\right) \{ |x| \leq k \} \left\{ \left|f\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leq 1 \right\}$$

的理論，我們不妨把函數的倒數也顯示出來，如下圖，然後發現倒數其實把圖形分成上下兩塊，然後上下翻轉，所以愈接近 0 的地方會愈接近 ∞ ，而愈接近 ∞ 的地方也會被翻轉到

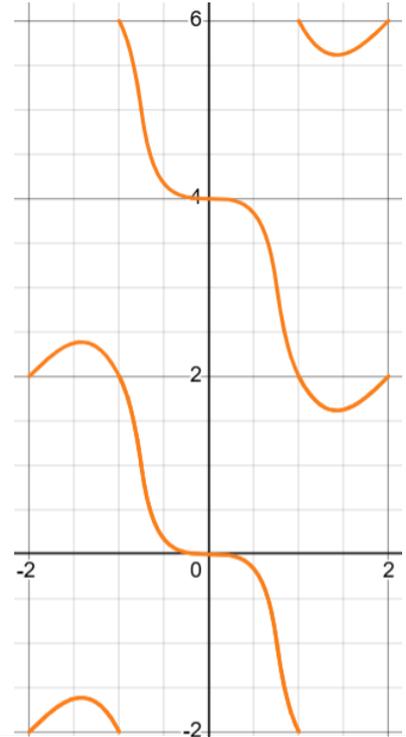


最後就可以來直觀的看到函數在整個實數範圍的長相了，這時把一些平時會跨越無限的函數給標上，就會發現他們跨越的地方，似乎是可以連接在一起的，如右圖（此圖形為 $x^3/(x^2-1)$ ），再根據上面的

接近 0 的位置，而正負不會改變，所以分成上下兩塊。至於是否真的有連接，可以把圖形複製一份並且位移一下，如下圖，可以發現上下無限處似乎連接在一起了，而連接處就如同倒數在 0 的位置，所以由此可知當他衝到無限時，其實就是從另一端再冒出來。



接近 0 的位置，而正負不會改變，所以分成上下兩塊。至於是否真的有連接，可以把圖形複製一份並且位移一下，如下圖，可以發現上下無限處似乎連接在一起了，而連接處就如同倒數在 0 的位置，所以由此可知當他衝到無限時，其實就是從另一端再冒出來。



參考資料

<https://www.youtube.com/watch?v=oOLw1hg3Jr4>

<https://www.desmos.com/calculator/5qgktdl8in?lang=zh-TW>

註：

1. 未使用本競賽官網提供「科學文章表單」格式投稿，**將不予審查**。

2. 字數沒按照本競賽官網規定之限 500 字~1,500 字，將不予審查。

PS.摘要、參考資料與圖表說明文字不計入。

3. 建議格式如下：

- 中文字型：微軟正黑體；英文、阿拉伯數字字型：Times New Roman
- 字體：12pt 為原則，若有需要，圖、表及附錄內的文字、數字得略小於 12pt，不得低於 10pt
- 字體行距，以固定行高 20 點為原則
- 表標題的排列方式為向表上方置中、對齊該表。圖標題的排列方式為向圖下方置中、對齊該圖